La llibreta
Aprendiendo a aprender

7 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

OBJETIVO 1

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una **ecuación de segundo grado** es una igualdad algebraica del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde:

- a, b y c son los **coeficientes** de la ecuación, siendo $a \neq 0$.
- $ax^2 \to$ **término cuadrático** $bx \to$ **término lineal** $c \to$ **término independiente**
- x es la **incógnita**.

1 **Escribe la expresión general de estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $(x-1)(x+4) = 1 \to x^2 + 4x - x - 4 = 1 \to x^2 + 3x - 4 - 1 = 0 \to x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $2x(3x+5) = -1 + 4x \to 6x^2 + 10x = -1 + 4x \to 6x^2 + 6x + 1 = 0$

c) $x - 5x^2 + 8 = -3x^2 - x - 3 \to -2x^2 + 2x + 11 = 0$

2 **Identifica los coeficientes de las ecuaciones de segundo grado del ejercicio anterior.**

a) $x^2 + 3x - 5 = 0 \to a = 1$, $b = 3$, $c = -5$

b) $a = 6$, $b = 6$, $c = 1$

c) $a = -2$, $b = 2$, $c = 11$

~~d)~~

FÓRMULA GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado puede tener **dos, una o ninguna solución**.

Para obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado se aplica la siguiente fórmula.

$$ax^2 + bx + c = 0 \to \mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

EJEMPLO

Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores -2 y -3 en la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se comprueba que la cumplen:

$(-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 6 = 0 \to 4 - 10 + 6 = 0 \to 10 - 10 = 0 \to 0 = 0$

$(-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6 = 0 \to 9 - 15 + 6 = 0 \to 15 - 15 = 0 \to 0 = 0$

7 RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

OBJETIVO 1

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga c, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$
  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$
  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:
  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$
- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.
  Tiene una única solución, $x = 0$.
- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$
  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

ACTIVIDADES

1 Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.

a) $4x^2 - 64 = 0$ $\rightarrow 4x^2 = 64 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{64}{4}} = \pm 4$

b) $4x^2 + 64 = 0$ $\rightarrow 4x^2 = -64 \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{64}{4}}$ = No existe sol.

c) $4x^2 = 0$ $\rightarrow x = 0$

7 RESOLVER ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

OBJETIVO 1

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

EJEMPLO

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

- Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$
- Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.

Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.

Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

2 Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $\longrightarrow$ $x_1 = -2$; $x_2 = -3$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$ $\longrightarrow$ $x_1 = 6$ (sol. doble)

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\longrightarrow$ $x_1 = 2$; $x_2 = 1$

7

3 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = -3$

d) $7x^2 + 21x = 28 \longrightarrow 7x^2 + 21x - 28 = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -4$

b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = 2$

e) $3x^2 + 6 = -9x \longrightarrow 3x^2 + 9x + 6 = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = -2$

c) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

$x_1 = \frac{7}{2}$

$x_2 = -1$

f) $(2x - 4)(x - 1) = 2 \longrightarrow 2x^2 - 2x - 4x + 4 - 2 = 0$

$\rightarrow 2x^2 - 6x + 2 = 0$

$x_1 = 2{,}62$

$x_2 = 0{,}38$

4 **Resuelve las ecuaciones y comprueba que las soluciones verifican la ecuación.**

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -4$

b) $3x^2 - 6x - 9 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = -1$

c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = \frac{1}{2}$

7 INCOMPLETAS: Falta b

OBJETIVO 2

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + c = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.
Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $b = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$\mathbf{ax^2 + c = 0} \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

- Si el **radicando** es **positivo**, hay dos soluciones opuestas: $x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.
- Si el **radicando** es **negativo**, no hay solución.

EJEMPLO

$$\mathbf{2x^2 - 32 = 0} \rightarrow 2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = \frac{32}{2} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$\mathbf{3x^2 + 75 = 0} \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{-75}{3} \rightarrow x^2 = -25 \rightarrow x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{28}{7}} = \pm 2$

b) $5x^2 - 180 = 0$ $\rightarrow 5x^2 = 180$

$x = \pm\sqrt{\frac{180}{5}} = \pm 6$

c) $5x^2 = 45$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{45}{5}} = \pm 3$

d) $18x^2 - 72 = 0$ $\rightarrow 18x^2 = 72 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{72}{18}} = \pm 2$

6 **Indica por qué no tienen solución estas ecuaciones.**

a) $x^2 + 4 = 0$ $\rightarrow x^2 = -4$

En todos los apartados, al despejar la x queda negativa y no tiene solución porque no existen las raíces pares de números negativos

b) $2x^2 = -18$

$x^2 = \sqrt{\frac{-18}{2}}$ = No existe sol

c) $9x^2 - 5x + 18 = -18 - 5x$

$9x^2 = -36$

d) $3(x^2 + x) = 3x - 12$ $\rightarrow 3x^2 + 3x - 3x + 12 = 0$

$3x^2 + 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = -12$

e) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4} = 0$ $\quad \frac{1}{2}x^2 = -\frac{3}{4}$

f) $\frac{x^2 + 7}{3} = 2$ $\quad x^2 + 7 = 6 \rightarrow x^2 = -1$

7 INCOMPLETAS: Falta c

OBJETIVO 3

ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bx = 0$

Las ecuaciones de la forma $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ se consideran ecuaciones de segundo grado.
Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $c = 0$.

Para resolverlas se sigue este proceso.

$$\mathbf{ax^2 + bx = 0} \xrightarrow{\text{Factor común } x} x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Estas ecuaciones tienen siempre dos soluciones, siendo cero una de ellas.

EJEMPLO

$$\mathbf{x^2 - 12x = 0} \rightarrow x(x - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 12 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \end{cases}$$

$$\mathbf{2x^2 + 5x = 0} \rightarrow x(2x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x_2 = \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

7 **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $5x^2 + 5x = 0$

$5x(x+1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

b) $2x^2 - 8x = 0$

$2x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

c) $6x^2 = 30x$ $\rightarrow 6x^2-30x=0$

$6x(x-5)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

d) $-5x^2 + 20x = 0$

$5x(-x+4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

8 **Halla la solución de estas ecuaciones.**

a) $25x^2 - 100x = 0$

$x(25x-100)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

b) $5x - 4x^2 = 0$

$x(5-4x)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=5/4 \end{cases}$

c) $x - x^2 = 0$

$x(1-x)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

d) $-4x^2 + 16x = 0$

$4x(-x+4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

e) $x(x - 3) + 8 = 4(x + 2)$ $\rightarrow x^2-3x+8-4x-8=0$

$\rightarrow x^2-7x=0 \rightarrow x(x-7)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=7 \end{cases}$

f) $\dfrac{x(x - 1)}{2} = \dfrac{2x^2 + 3}{3}$ $\rightarrow 3x^2-3x=4x^2+6$

$\rightarrow -x^2-3x-6=0 \rightarrow$ No tiene sol.

7 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO: ACTIVIDADES

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x - 1)(x + 6) - 4(3x - 4) = 0$

$x^2 + 6x - x - 6 - 12x + 16 = 0$

$x^2 - 7x + 10 = 0 \longrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 10}}{2}$

$x_1 = \frac{7+3}{2} = 5$

$x_2 = \frac{7-3}{2} = 2$

b) $x(x - 1) + 6(x + 1) = 0$

$x^2 - x + 6x + 6 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \longrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2}$

$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$

c) $(x + 5)(x - 1) - 2(x + 1) + (x + 11) = 0$

$x^2 - \cancel{x} + 5x - 5 - 2x - 2 + \cancel{x} + 11 = 0$

$x^2 + 3x + 4 = 0 \longrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} \longrightarrow \nexists$ sol.

d) $(x + 3)(x - 5) + 2(x - 17) = 0$

$x^2 - 5x + 3x - 15 + 2x - 34 = 0$

$x^2 - 49 = 0 \longrightarrow x^2 = 49$

$x = +\sqrt{49} = 7$

$x = -\sqrt{49} = -7$

7 RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

OBJETIVO 4

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para resolver un problema utilizando ecuaciones es conveniente seguir estos pasos.

1.º **Lectura y comprensión del enunciado.** Es necesario distinguir los datos conocidos y el dato desconocido, es decir, la incógnita.

2.º **Planteamiento de la ecuación.** Hay que expresar las condiciones del enunciado en forma de ecuación: la correspondencia entre los datos y la incógnita.

3.º **Resolución de la ecuación.** Se obtiene el valor de la incógnita resolviendo la ecuación.

4.º **Comprobación e interpretación del resultado.** Se debe comprobar si el resultado verifica el enunciado e interpretar la solución en el contexto del problema.

EJEMPLO

Ana tiene 2 € más que Berta, Berta tiene 2 € más que Eva y Eva tiene 2 € más que Luisa. Entre las cuatro amigas tienen 48 €. Calcula la cantidad de dinero que tiene cada una.

1.º **Lectura y comprensión del enunciado.**
Tomamos como dato desconocido el dinero que tiene Luisa.

2.º **Planteamiento de la ecuación.**
Dinero de Luisa $\rightarrow$ x

Las restantes cantidades de dinero las escribimos en función de x:

Dinero de Eva $\longrightarrow$ 2 € más que Luisa $\rightarrow$ $x+2$
Dinero de Berta $\rightarrow$ 2 € más que Eva $\longrightarrow$ $(x+2)+2=x+4$
Dinero de Ana $\longrightarrow$ 2 € más que Berta $\rightarrow$ $(x+4)+2=x+6$

Escribimos la condición de que la suma de las cantidades es 48 €.

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=48$$

3.º **Resolución de la ecuación.**

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=48 \rightarrow 4x+12=48 \rightarrow 4x=48-12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x=36 \rightarrow x=\frac{36}{4}=9 \rightarrow \text{Luisa tiene 9 €.}$$

Eva tiene: $9+2=11$ €. Berta tiene: $9+4=13$ €. Ana tiene: $9+6=15$ €.

4.º **Comprobación e interpretación del resultado.**
Las cantidades que tienen las amigas: 9, 11, 13 y 15 € cumplen las condiciones del enunciado.

$$9+11+13+15=48$$

1 **La suma de tres números consecutivos es 30. Hállalos.**

$x+(x+1)+(x+2)=30 \longrightarrow 3x+3=30 \longrightarrow 3x=27 \longrightarrow \boxed{x=\frac{27}{3}=9}$

Los tres nº consecutivos son 9, 10 y 11 $\longrightarrow$ comprobación: $9+10+11=30$

2 **La suma de un número, su doble y su triple es 66. ¿Cuál es el número?**

$x+2x+3x=66 \longrightarrow 6x=66 \longrightarrow \boxed{x=\frac{66}{6}=11}$

comprobación: $11+(2\cdot 11)+3(11)=11+22+33=66$

7 RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

EJEMPLO

Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{2x}{3}$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1	$\frac{2x}{3} - 1$
$\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11	$\frac{2x}{3} - 1 = 11$

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

ACTIVIDADES

1 Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.
(Con los números x, x + 1 *y* x + 2, plantea la ecuación correspondiente.)

$$x + (x+1) + (x+2) = 24 \longrightarrow 3x + 3 = 24 \longrightarrow 3x = 21 \longrightarrow \boxed{x = \frac{21}{3} = 7}$$

Los nº consecutivos son: 7, 8 y 9

2 Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.

ENUNCIADO	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
El número	x
$\frac{2}{3}$ partes del número	$\frac{x}{2}$
Su triple	$3x$
5 unidades menor que su triple	$3x - 5$
Su mitad es 5 unidades menor que su triple	$\frac{x}{2} = 3x - 5$

$$\underbrace{\text{La mitad de un nº}} = \underbrace{\text{5 ud menor que su triple}}$$

$$\frac{x}{2} = 3x - 5$$

$$x = 2(3x-5) \longrightarrow x = 6x - 10$$

$$6x - x = 10$$

$$5x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{5} = \boxed{2}$$

7 RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES

3 El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).

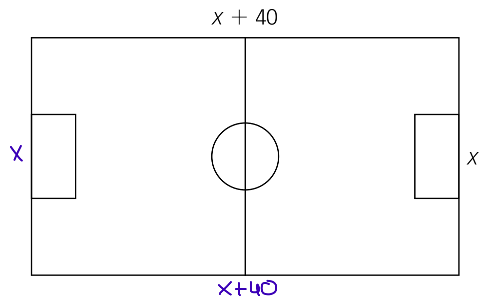
El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2(x + 40) = 280$

$x+(x+40)+x+(x+40)=280$

$4x+80=280$

$4x=280-80 \rightarrow x=\frac{200}{4}=50$

sol:
El campo mide 50m de ancho y 90 m de largo



4 Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.

Llamamos x = edad de Pepe, $x - 2$ = edad de María y $x - 3$ = edad de Juan

$x+(x-2)+(x-3)=40$

$3x-5=40$

$3x=45 \rightarrow x=\frac{45}{3}=15$

sol. Pepe tiene 15 años
María tiene 13 años
Juan tiene 12 años

comprobación
$15+13+12=40$

5 El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

	EDAD ACTUAL	DENTRO DE *x* AÑOS
Pepe	15	$15 + x$
María	13	$13 + x$
Juan	12	$12 + x$
Padre	46	$46 + x$

Planteamos la ecuación:

$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$

$3x+40=46+x$

$3x-x=46-40$

$2x=6 \rightarrow x=\frac{6}{2}=\boxed{3}$

Tienen que pasar 3 años.

6 La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.

	EDAD ACTUAL	DENTRO DE *x* AÑOS
Pepe	15	$15 + x$
María	42	$42 + x$

Planteamos la ecuación:

$15 + x = \frac{42 + x}{2} \rightarrow 2(15+x)=42+x$

$30+2x=42+x$

$x=\boxed{12}$

Deben pasar 12 años.

7 RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES

7 La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.

Si representamos los números por x y $x+1$, sus cuadrados serán x^2 y $(x+1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

Nº 1 = x
Nº 2 = x+1

identidad notable

$x^2 + (x+1)^2 = 61$

$x^2 + x^2 + 1 + 2x = 61$

$2x^2 + 2x + 1 - 61 = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x - 60 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-60)}}{2 \cdot 2}$ → $x = 5$, $x = -6$ las dos soluciones son válidas

comprobación
$x=5 \rightarrow 5^2 + (5+1)^2 = 61 \rightarrow$ sí cumple
$x=-6 \rightarrow (-6)^2 + (-6+1)^2 = 61 \rightarrow$ sí cumple

8 El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

x = edad del abuelo

$x^2 = 160(15+13+12)$

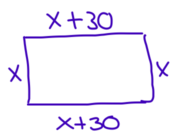
$x^2 = 6400 \rightarrow x = \pm\sqrt{6400}$ → $x = 80$, $x = -80 \rightarrow$ no vál.

La edad del abuelo es de 80 años.

9 Un campo de baloncesto tiene 1 000 m² de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.

↳ área rectángulo = base · altura

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.



área = base · altura $\Rightarrow x(x+30) = 1000$

$x^2 + 30x = 1000$

$x^2 + 30x - 1000 = 0$ → $x = 20$, $x = -50 \rightarrow$ no vál.

El campo mide 20 m de ancho y 50 m de largo.

10 Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m². Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.

área = x^2

área del cuadrado = lado · lado = l^2

Si el lado es $x+2 \rightarrow$ área = $(x+2)^2$

	ANTES	DESPUÉS
x = Lado	15	$x + 2$
Superficie	42	$(x + 2)^2$

La diferencia entre el área anterior y la nueva es de 16:

$(x+2)^2 - x^2 = 16$

$x^2 + 4x + 4 - x^2 = 16$

$4x = 12 \rightarrow \boxed{x = 3 \text{ m}}$

7 ECUACIONES BICUADRADAS

OBJETIVO 5

EJEMPLO

Una ecuación bicuadrada es una ecuación de grado 4 a la que le faltan los términos de grado 3 y 1.
Por ejemplo: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Pasos para resolverla:

1º Hacemos un cambio de variable: $x^2 = t$; $x^4 = t^2$

2º Sustituimos en la ecuación: $t^2 - 6t + 8 = 0$

3º Resolvemos la ecuación obtenida (ecuación de segundo grado): $t = 4$ y $t = 2$

4º Deshacemos el cambio de variable y calculamos los valores de x. Obtendremos un máximo de 4 soluciones por ser de grado 4:

si $t = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$; $x = -2$

si $t = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$

ACTIVIDADES

1 Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $x = \pm 3$ $x = \pm 1$

b) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ $x = \pm 2$ $x = \pm\sqrt{3}$

c) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$ $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ $x = \pm 1$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $x = \pm 2$ $x = \pm 1$

e) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$ $x = \pm 3$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $x = \pm 3$ $x = \pm 2$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas incompletas.

a) $2x^4 - 50x^2 = 0 \rightarrow x^2(2x^2 - 50) = 0 <$ $x = 0$; $x = \pm 5$

b) $x^4 - 81 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{81} = 3$

c) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow \nexists$ sol

d) $x^4 - 1\,296 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{1296} = 6$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^2 \cdot (x^2 - 4) = 9x^2 - 36 \rightarrow x^4 - 4x^2 - 9x^2 + 36 = 0 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0 <$ $x = \pm 3$; $x = \pm 2$

b) $2x^4 = 27x^2 - 25 + x \cdot (x^3 - x) \rightarrow 2x^4 = 27x^2 - 25 + x^4 - x^2 \rightarrow x^4 - 26x^2 + 25 = 0 <$ $x = \pm 5$; $x = \pm 1$

c) $\frac{x^2 \cdot (x^2 + 1)}{3} = \frac{12 \cdot (x + 1)}{3} - 4x \rightarrow x^4 + x^2 = 12x + 12 - 12x \rightarrow x^4 + x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

d) $\frac{(x^2 - 3)^2}{2} + x^4 = x - (x + 3) \rightarrow (x^2 - 3)^2 + 2x^4 = 2[x - (x + 3)]$

$x^2 - 6x^2 + 9 + 2x^4 = -6 \rightarrow 2x^4 - 5x^2 + 15 = 0 \rightarrow \nexists$ sol