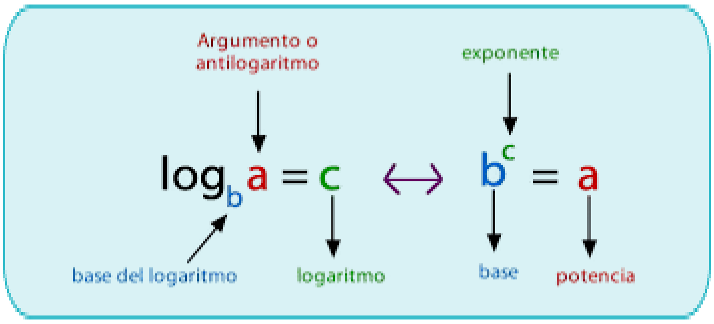
TEMA 4: Logaritmos. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

ÍNDICE

1. DEFINICIÓN DE LOGARITMO



EJEMPLO

- $\log_3 x = 2$ porque $3^2 = x \rightarrow x = 9$
- $\log_x 27 = 3$ porque $x^3 = 27 \rightarrow x^3 = 3^3 \rightarrow x=3$
- $\log_2 8 = x$ porque $2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x=4$

EJERCICIOS

1. Halla el valor de x:

a) $\log_2 x = 4$
b) $\log_5 x = 2$
c) $\log_6 x = 1$
d) $\log_4 x = 0$
e) $\log_3 x = -5$
f) $\log x = 2$

2. Halla el valor de x:

a) $\log_x 125 = 3$
b) $\log_2 x = 1$
c) $\log_x 100 = 2$

3. Halla los siguientes logaritmos basándote en la definición:

a) $\log_5 125$ **b)** $\log_5 0{,}04$ **c)** $\log_2 128$ **d)** $\log_2 0{,}0625$

2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- El logaritmo de 1 es siempre 0, y el logaritmo de la base es 1.

  $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

- El **logaritmo de un producto** es la suma de los logaritmos de los factores.

  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

- El **logaritmo de un cociente** es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

- El **logaritmo de una potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

- **Cambio de base** en los logaritmos.

  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

EJEMPLO

- $\log 10 = 1$ (su base es 10) **(propiedad 1)**
- $\log_2 2 = 1$ **(propiedad 1)**
- $\log 5 + \log 3 = \log (5 \cdot 3) = \log 15$ **(propiedad 2)**
- $\log 5 - \log 3 = \log (5/3)$ **(propiedad 3)**
- $2\log 3 = \log 3^2 = \log 9$ **(propiedad 4)**
- $\log_2 2^3 = 3 \cdot \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$ **(propiedades 4 y 1)**
- $\log_2 3 = \log_5 3 / \log_5 2$ **(propiedad 5)**
- $\log 20 + \log 50 = \log (50 \cdot 20) = \log (1000) = \log 10^3 = 3\log 10 = 3 \cdot 1 = 3$ **(propiedades 2, 1 y 4)**

ACTIVIDADES

4. Resuelve, utilizando las propiedades correspondientes:

a) $\log_2 400 - \log_2 25$

b) $\log_2 288 - 2\log_2 6$

c) $\log 4 + \log 0{,}025$

d) $\log_3 0{,}2 + \log_3 405$

EJEMPLO

Desarrolla la expresión:

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

ACTIVIDADES

5. Desarrolla la expresión:

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 =$$

6. Reduce a un único logaritmo:

$$3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 =$$

EJEMPLO

Sabiendo que $\log 7 = 0{,}8451$ calcula aplicando las propiedades de los logaritmos.

$\log 28 + \log 15 - \log 6$

log 28 + log 15 – log 6 → Aplicamos las propiedades de la suma y de la resta **(propiedad 2)**

log (28·15/6) → Operamos 28·15/6=70

log (70) → Descomponemos 70 como 10·7, porque log 10=1 **(propiedad 1)** y log7 nos lo dan

log (10·7) → Aplicamos la propiedad de la suma **(propiedad 2)**

log 10 + log 7 → Sustituimos por sus valores

1 + 0,8451 = 1,8451 es el valor del logaritmo

ACTIVIDADES

7. **Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo $\log x = 0{,}70$ y $\log y = 1{,}18$, calcula:**

a) $\log (x^2 y)$ **b)** $\log\left(\frac{x^3}{y^2}\right)$ **c)** $\log\left(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2}\right)$

3. Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella ecuación en la que la incógnita (x) aparece afectada por un logaritmo. Se resuelven aplicando las **propiedades** de los logaritmos.

EJEMPLO

- $\log x + \log 3 = 2 \log 3$ → Aplicando las propiedades de la suma y de la potencia:
  $\log (x \cdot 3) = \log 3^2$ → Eliminamos los logaritmos:
  $3x = 9$ → Despejamos x
  $x = 9/3$ → $x = 3$

ACTIVIDADES

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

8. $\log x + \log 2 = \log 20$

9. $\log x + \log (2x) = \log 50$

10. $\log 2x - 2\log 3 = \log 2$

11. $\log_2 x^2 - \log_2 x = 3$

Recuerda que NO EXISTEN los logaritmos nulos (de 0) ni negativos.
Comprobaremos las soluciones para asegurarnos de que todos los logaritmos existen.

EJEMPLO

- $\log x + \log (x+3) = 2\log(x+1)$ → Aplicando las propiedades de la suma y de la potencia:
  $\log (x \cdot (x+3)) = \log (x+1)^2$ → Eliminamos los logaritmos:
  $x(x+3) = (x+1)^2$ → Resolvemos el paréntesis de la izquierda y la identidad notable de la derecha
  $x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1$ → Despejamos x
  $3x - 2x = 1$ → $x=1$

COMPROBAMOS, sustituyendo el valor de x se obtiene:
Término de la izquierda: log 1 y log 4; Término de la derecha: log 2.
Todos EXISTEN, por tanto x=1 es la solución

- 2log(x + 1) – log 2 = log (x² – 1)

$$2\log(x+1)-\log 2=\log(x^2-1)\rightarrow \log(x+1)^2-\log 2=\log(x^2-1)$$

$$\log\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]=\log(x^2-1)$$

Por lo que:

$$\frac{(x+1)^2}{2}=(x^2-1)$$

Multiplicando la ecuación por 2

$$(x+1)^2=2(x^2-1)$$

Desarrollando los cuadrados y transponiendo términos, obtenemos la ec. de segundo grado

$$x^2-2x-3=0\rightarrow x=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$$

Comprobación:

$\boxed{x = 3}$ si que es solución ya que:

Término izquierda ec

$2\log 4-\log 2$

$\log 4^2-\log 2$

$\log\left(\frac{4^2}{2}\right)=\log 8$

Término derecha ec.

$\log 8$

$\boxed{\cancel{x = -1}}$ no es solución ($\log 0$ no se puede calcular)

ACTIVIDADES

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

12. $\log(x^3-8)=3\log(x-2)$
13. $\log(x^2+2x-39)-\log(3x-1)=1$
14. $\frac{\log(x^2+11)}{2}=\log x+\log 6-\log 5$
15. $2\log x-2\log(x+1)=0$
16. $\log(25-x^3)-3\log(4-x)=0$
17. $\frac{\log(35-x^2)}{\log(5-x)}=3$

4. Aplicación de logaritmos en la resolución de ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella ecuación en la que la incógnita (x) aparece en el exponente. Se resuelven aplicando las **propiedades** de los logaritmos.

EJEMPLO

Si tenemos la misma base, podemos igualar los exponentes. $\mathbf{a^b = a^c \rightarrow b = c}$

$2^{4x-5} = 8 \rightarrow$ Buscamos la misma base, descomponiendo el 8 en factores primos.

$2^{4x-5} = 2^3 \rightarrow$ Como la base en ambos lados de la ecuación es 2, los exponentes también son iguales.

$4x - 5 = 3 \rightarrow$ Despejamos x

$4x = 8$

x=2 es la solución

ACTIVIDADES

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

18. $3^{-x+1} = 3^{2x+3}$

19. $4^x \cdot 16^x = 2$

20. $7^{x^2-5x+6} = 1$

21. $5 \cdot \sqrt[5]{125^{2x}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$

EJEMPLO

Puede que obtengamos una ecuación de segundo grado tras un cambio de variable: $\mathbf{a^x = t}$

$2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 8 \rightarrow$ Aplicando las propiedades de las potencias buscamos obtener 2^{2x} y 2^x.

$2^{2x} \cdot 2^1 - 3 \cdot 2^x + 1 = 8 \rightarrow$ Buscamos una ecuación de segundo grado, con el cambio $\mathbf{2^x = t}$ y $\mathbf{2^{2x} = t^2}$

$2t^2 - 3t + 1 = 8$

$2t^2 - 3t - 7 = 0 \rightarrow$ Resolvemos: $t = ½$ y $t = 1$

Deshacemos el cambio de variable para obtener las dos soluciones de x:

$2^x = t \rightarrow 2^x = ½ \rightarrow 2^x = 2^{-1} \rightarrow x = -1$

$2^x = t \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow 2^x = 2^0 \rightarrow x = 0$

ACTIVIDADES

22. Resuelve la siguiente ecuación exponencial: $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

EJEMPLO

Para despejar una incógnita que está en el exponente de una potencia, se toman logaritmos cuya base es la base de la potencia.

$a^x = b$ $\rightarrow$ se toman logaritmos a ambos lados de la igualdad

$\log_a a^x = \log b$ $\rightarrow$ se baja la potencia por la propiedad 4

$x \log_a a = \log b$ $\rightarrow$ y se aplica la propiedad 1: $\log_a a = 1$

$x = \log_a b$

- $3^x = 8 \rightarrow x = \log_3 8$
- $10^{2x} = 5 \rightarrow 2x = \log 5$ (en base 10, que no se pone) $\rightarrow x = (\log 5)/2 \rightarrow x = 0.349$
- $25 \cdot 10^x = 50 \rightarrow 10^x = 50/25 \rightarrow 10^x = 2 \rightarrow x = \log 2$ (en base 10, que no se pone) $\rightarrow x = 0{,}301$
- $e^x = 4 \rightarrow x = \ln 4 = 1{,}386$ **(recuerda que el logaritmo en base e es el logaritmo neperiano ln)**

ACTIVIDADES

23. Resuelve: $5 \cdot 10^x = 4$

24. Resuelve: $40 \cdot 10^t = 90$

25. Resuelve: $2^{5x} = 12$

26. Resuelve: $e^x = 5$

SOLUCIONES

1. a) 16 b) 25 c) 6 d) 1 e) 1/243
2. a) 5 b) 2 c) 10
3. a) 3 b) -2 c) 7 d) -4
4. a) 4 b) 3 c) -1 d) 4
5. $6\log x - 15\log y - 3\log z$
6. $$\log_2\left(\frac{a^3\cdot\sqrt{x}\cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2}\cdot 2^4}\right)$$
7. a) 1,58 b)0,92 c)1,137
8. 10
9. 5
10. 9
11. 8
12. x=0 y x=2, pero ninguna es válida.
13. x=29 y x=-1, pero la segunda no es válida.
14. x=5 y x=-5, pero la segunda no es válida.
15. x= -1/2, pero no es válida.
16. x= $2 \pm \sqrt{3}/2$
17. x=1 y x=2
18. x= -1/3
19. x= 1/6
20. x=2 y x=3
21. x=5/6
22. x=2 y x=0
23. x= log (4/5) = -0,0969
24. x= log (9/2) = 0,6532
25. x= (log 6)/5 = 0,1556
26. x= ln 5 = 1,6094

Tema 4 Desarrollo de las soluciones

1. a) $\log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4 \rightarrow x = 16$

   b) $\log_5 x = 2 \rightarrow x = 5^2 \rightarrow x = 25$

   c) $\log_6 x = 1 \rightarrow x = 6$

   d) $\log_4 x = 0 \rightarrow x = 4^0 \rightarrow x = 1$

   e) $\log_3 x = -5 \rightarrow x = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$

2. a) $\log_x 125 = 3 \rightarrow x^3 = 125 \rightarrow x^3 = 5^3 \rightarrow x = 5$

   b) $\log_2 x = 1 \rightarrow 2^1 = x \rightarrow x = 2$

   c) $\log_x 100 = 2 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 10^2 \rightarrow x = 10$

3. a) $log_5\ 125 = x \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow x = 3$

   b) $log_5\ 0{,}04 = x \rightarrow 5^x = 0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \rightarrow x = -2$

   c) $log_2\ 128 = x \rightarrow 2^x = 128 = 2^7 \rightarrow x = 7$

   d) $log_2\ 0{,}0625 = x \rightarrow 2^x = 0{,}0625 = \frac{625}{10\,000} = \frac{1}{16} \rightarrow x = -4$

4. a) $log_2\ 400 - log_2\ 25 = log_2 \frac{400}{25} = log_2\ 16 = 4$

   b) $log_2\ 288 - 2log_2\ 6 = log_2 \frac{288}{6^2} = log_2\ 8 = 3$

   c) $log\ 4 + log\ 0{,}025 = log\ (4 \cdot 0{,}025) = log\ (0{,}1) = -1$

   d) $log_3\ 0{,}2 + log_3\ 405 = log_3\ (0{,}2 \cdot 405) = log_3\ 81 = 4$

5. $\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$

6. $3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$

$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} . 2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$

7. a) 1,58 b)0,92 c)1,137

8 a 11.

$\log x + \log 2 = \log 20 \to \log(2 \cdot x) = \log 20 \to 2 \cdot x = 20 \to x = 10$

$\log x + \log(2x) = \log 50 \to \log(2 \cdot x^2) = \log 50 \to 2 \cdot x^2 = 50 \to x^2 = 25 \to x = 5$

$\log 2x - 2\log 3 = \log 2 \to \log\left(\frac{2x}{3^2}\right) = \log 2 \to \frac{2x}{3^2} = 2 \to x = 9$

$\log_2 x^2 - \log_2 x = 3 \to \log_2 \to \log_2\left(\frac{x^2}{x}\right) = 3 \to \log_2 x = 3 \to x = 2^3 = 8$

12.

$\log(x^3 - 8) = 3\log(x-2) \longrightarrow \log(x^3 - 8) = \log(x-2)^3$
De donde, podemos afirmar que:

$$x^3 - 8 = (x-2)^3$$

como $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ entonces

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ 0 &= -6x^2 + 12x \\ 0 &= x^2 - 2x \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación $0 = x^2 - 2x$ obtenemos como posibles soluciones.

$$x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

Nota: Comprueba tú que ninguna posible solución lo es

13. $\log(x^2+2x-39)-\log(3x-1)=1 \rightarrow \log\left[\frac{x^2+2x-39}{3x-1}\right]=\log 10$

De donde
$$\frac{x^2+2x-39}{3x-1}=10$$
Multiplicando por $3x-1$ (Lo podemos hacer ya que $3x-1 \neq {}^5 0$)
$$\begin{aligned} x^2+2x-39 &= 30x-10 \\ x^2-28x-29 &= 0 \end{aligned}$$
Cuyas soluciones son
$$x=\frac{28\pm\sqrt{784+116}}{2}=\frac{28\pm\sqrt{900}}{2}\left\{\begin{array}{l} 29 \\ -1 \end{array}\right.$$
De las dos posibles soluciones, $x=-1$ no es solución (Compruébalo)

14. $\frac{\log(x^2+11)}{2}=\log x+\log 6-\log 5 \rightarrow \frac{\log(x^2+11)}{2}=\log\left(\frac{6x}{5}\right)$

Multiplicando por 2:
$$\log(x^2+11)=2\log\left(\frac{6x}{5}\right)=\log\left(\frac{6x}{5}\right)^2$$
De donde
$$x^2+11=\frac{36x^2}{25}$$
Multiplicando por 25
$$25x^2+275=36x^2 \rightarrow 11x^2=275 \rightarrow x^2=25$$
Con lo que las posibles soluciones son
$$x=\left\{\begin{array}{l} 5 \\ -5 \end{array}\right.$$
Nota: La única que vale es el 5 (Compruébalo tú)

15.

$$2\log x - 2\log(x+1) = 0$$

$$\log x^2 - \log(x+1)^2 = \log 1$$

$$\log \frac{x^2}{(x+1)^2} = \log 1 \qquad \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

$$2x + 1 = 0 \qquad x = -\frac{1}{2} \qquad \text{Sin solución}$$

16.

$$\log(25 - x^3) - 3\log(4 - x) = 0$$

$$\log(25 - x^3) = \log(4 - x)^3 \qquad (25 - x^3) = (4 - x)^3$$

$$25 - x^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$$

$$12x^2 - 48x + 39 = 0 \qquad x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

17.

$$\frac{\log(35 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$\log(35 - x^2) = 3\log(5 - x)$$

$$\log(35 - x^2) = \log(5 - x)^3 \qquad (35 - x^2) = (5 - x)^3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

18. Exponenciales con igual base, se igualan los exponentes.

$$3^{-x+1} = 3^{2x+3} \Leftrightarrow -x + 1 = 2x + 2$$

$$1 - 2 = 2x + x$$

$$3x = -1 : x = \frac{-1}{3}$$

19.

Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$4^x \cdot 16^x = 2 \quad : \quad \left(2^2\right)^x \cdot \left(2^4\right)^x = 2 \quad : \quad 2^{2x} \cdot 2^{4x} = 2 \quad : \quad 2^{2x+4x} = 2^1$$

$$2^{6x} = 2^1 \Rightarrow 6x = 1 \quad : \quad x = \frac{1}{6}$$

20. Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$7^{x^2-5x+6}=1 \quad ; \quad 7^{x^2-5x+6}=7^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} \; ; \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

21. Los dos términos se pueden expresar como exponenciales de igual base.

$$5\cdot\sqrt[5]{125^{2x}}=\left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1} \quad ; \quad 5\cdot\left(\left(5^3\right)^{2x}\right)^{1/5}=\left(5^{-2}\right)^{3x-1} \quad ; \quad 5\cdot 5^{3\cdot 2x\cdot\frac{1}{5}}=5^{-2\cdot(3x-1)}$$

$$5\cdot 5^{\frac{6x}{5}}=5^{-6x+2} \quad ; \quad 5^{1+\frac{6x}{5}}=5^{-6x+2} \quad ; \quad 1+\frac{6x}{5}=-6x+2$$

$$\frac{6x}{5}+6x=2-1 \quad ; \quad \frac{6x+30x}{5}=1 \quad ; \quad 36x=5 \quad ; \quad x=\frac{5}{36}$$

22.

$$2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$$

Si llamamos a $2^x=t$ tenemos entonces: $\quad t^2-5\cdot t+4=0 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} t=4 \\ t=1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 2^x=4 \\ 2^x=1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x=2 \\ x=0 \end{matrix}$

23. x= log (4/5) = -0,0969

24. x= log (9/2) = 0,6532

25. x= (log 6)/5 = 0,1556

26. x= ln 5 = 1,6094