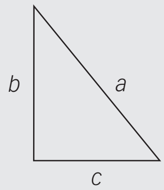
10 CONOCER EL TEOREMA DE PITÁGORAS

OBJETIVO 1

TEOREMA DE PITÁGORAS

- Pitágoras fue un científico de la época griega, que enunció el teorema que lleva su nombre y que afirma: «En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos».



$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ Despejando $\longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

- Se pueden hallar los valores de los catetos en función de los otros valores:

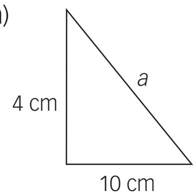
$b^2 = a^2 - c^2$ Despejando $\longrightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$c^2 = a^2 - b^2$ Despejando $\longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

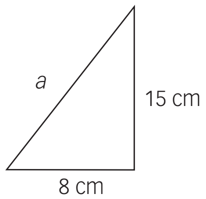
ACTIVIDADES

1 Calcula el valor de la hipotenusa en los siguientes triángulos rectángulos.

a)

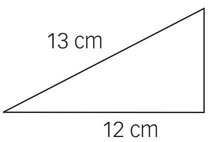


b)

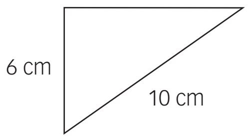


2 Obtén el valor de los catetos que faltan en cada triángulo rectángulo.

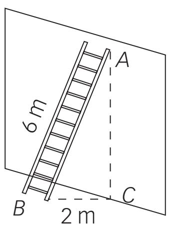
a)



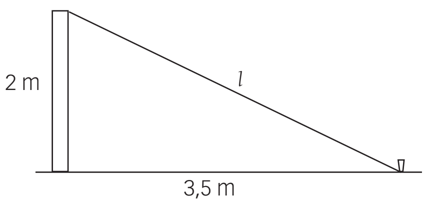
b)



3 Una escalera que mide 6 m se apoya en una pared. Desde la base des la escalera a la pared hay una distancia de 2 m. Halla la altura marcada en la pared por la escalera. *(En la figura, la distancia* AC.*)*

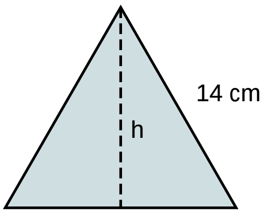


4 Pedro y Elisa quieren sujetar con una cuerda un poste de 2 m de altura a una estaca que está situada a 3,5 m de la base del poste. Calcula la longitud de la cuerda que necesitan.

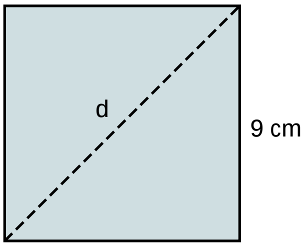


10 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

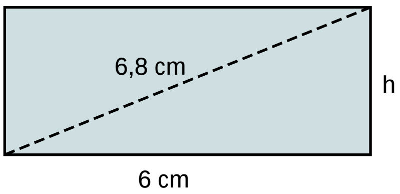
1 **Calcula la altura de un triángulo equilátero de 14 cm de lado.**



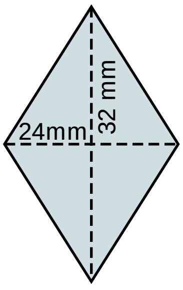
2 **Calcula la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado.**



3 **Calcula la altura de un rectángulo cuya diagonal mide 6,8 cm y la base 6 cm.**

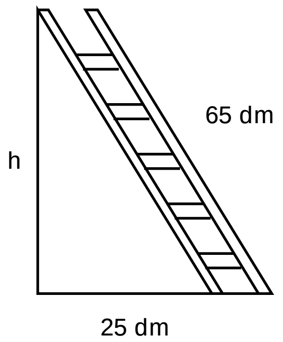


4 **Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 mm y 24 mm.**

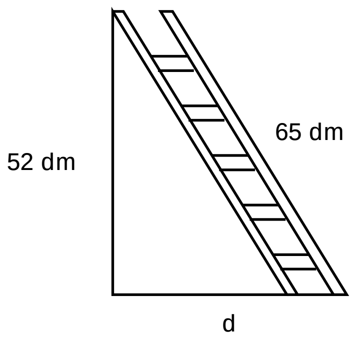


5 **Una escalera de 65 dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared.**

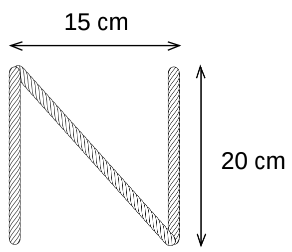
a) ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?



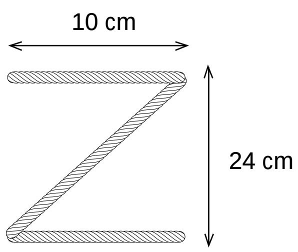
b) ¿A qué distancia de la pared habrá que colocar el pie de esta misma escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 52 dm?



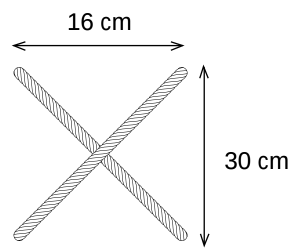
6 **Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formar las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones.**



Se necesitan_____cm.



Se necesitan_____cm.

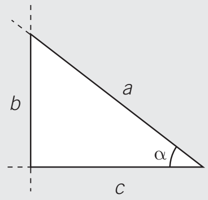


Se necesitan_____cm.

10 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVO 2

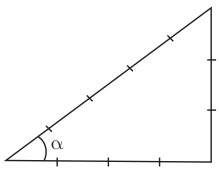
Dado un triángulo rectángulo, definimos las **razones trigonométricas** de uno de sus ángulos agudos α:



seno	coseno	tangente
$\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a}$	$\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$	$\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c}$
(cateto opuesto dividido entre hipotenusa)	(cateto contiguo dividido entre hipotenusa)	(cateto opuesto dividido entre cateto contiguo)

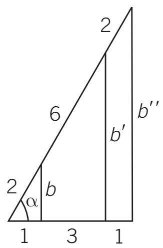
EJEMPLO

Determina las razones trigonométricas del ángulo α en el triángulo de la figura.



$\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $\cos \alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{4}$

1 **Completa las igualdades y comprueba que las razones trigonométricas son independientes del tamaño del triángulo elegido.**



Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos de menor a mayor tamaño, hallamos b, b' y b'':

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

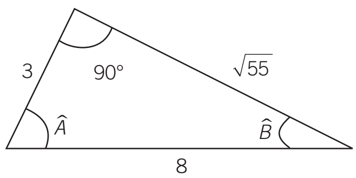
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{b}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\text{sen } \alpha = \dfrac{b'}{8} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} =$ ________ $\qquad$ $\text{sen } \alpha = \dfrac{b''}{10} = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} =$ ________

$\cos \alpha = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos \alpha = \dfrac{c'}{a'} =$ ________ $=$ ________ $\qquad$ $\cos \alpha = \dfrac{c''}{a''} =$ ________ $=$ ________

$\text{tg } \alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{b'}{c'} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} =$ ________ $\qquad$ $\text{tg } \alpha = \dfrac{b''}{c''} =$ ________ $=$ ________

2 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.**



10 CONOCER LAS UNIDADES DE LONGITUD Y SUPERFICIE. CALCULAR PERÍMETROS

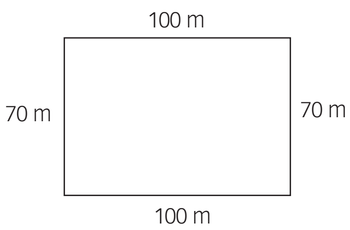
OBJETIVO 3

PERÍMETRO DE UN POLÍGONO

El perímetro de un polígono es la medida de su contorno. Para calcularlo **sumamos sus lados**.
Lo expresamos con la letra *P*.

EJEMPLO

Halla el perímetro de un campo de fútbol de lados 100 m y 70 m.



$P = 100 + 70 + 100 + 70 = 340$ m

El perímetro es una medida de longitud.

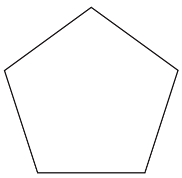
10 Calcula el perímetro del tablero de tu pupitre y de una baldosa del suelo de tu aula. Realiza un dibujo representativo.

Tablero del pupitre

Baldosa

11 Halla el perímetro de los siguientes polígonos regulares. Realiza un dibujo de cada figura.

a) Pentágono, de 5 cm de lado.



c) Hexágono, de 7 cm de lado.

b) Triángulo equilátero, de 3 cm de lado.

d) Cuadrado, de 10 cm de lado.

10 CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

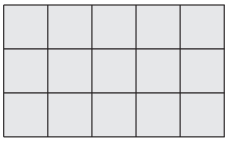
OBJETIVO 4

ÁREA DE UNA FIGURA

- El área de una figura es la medida de su superficie, e indica el número de veces que contiene la unidad de superficie.
- El valor del área depende de la unidad de medida que tomemos.
- Lo expresamos con la letra *A*.

EJEMPLO

Tomando como unidad de superficie un cuadradito ☐, calcula el área de la siguiente figura:

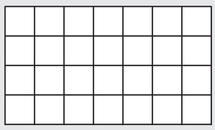


- La figura contiene 15 ☐.
- Su área es: $A = 15$ unidades de superficie

- Si cada cuadradito tuviera 1 cm de lado, su área sería 1 cm^2. ☐ 1 cm
- Y el área de la figura sería 15 cm^2.

ÁREA DEL RECTÁNGULO

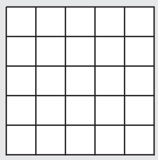
- El rectángulo de la figura realizada a escala tiene 28 cuadrados de 1 cm^2 cada uno.
- Son 7 columnas y 4 filas.
- Para hallar el área del rectángulo se multiplica la longitud de la base por la longitud de la altura.



Área rectángulo = base · altura → $A = b \cdot h = 7\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 28\text{ cm}^2$

ÁREA DEL CUADRADO

- El cuadrado de la figura realizada a escala tiene 25 cuadrados de 1 cm^2.
- Son 5 columnas y 5 filas.
- Para hallar el área del cuadrado se multiplica la longitud de un lado por la longitud del otro lado.



Área cuadrado = lado · lado → $A = l \cdot l = 5\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 25\text{ cm}^2$

10

2 Obtén el área de estos rectángulos y realiza un dibujo representativo.

a) Base = 10 cm Altura = 4 cm

b) Base = 12 cm Altura = 6 cm

3 Determina el área de los cuadrados y realiza un dibujo representativo.

a) Lado = 4 cm

b) Lado = 8 cm

4 Un rectángulo tiene 36 cm^2 de área y 12 cm de base. Calcula.

a) La altura del rectángulo.

b) El perímetro del rectángulo.

5 Si un cuadrado tiene 64 cm^2 de área, halla.

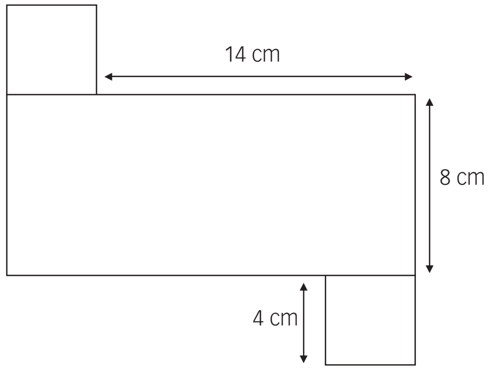
a) El lado del cuadrado.

b) El perímetro del cuadrado.

10 CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

OBJETIVO 4

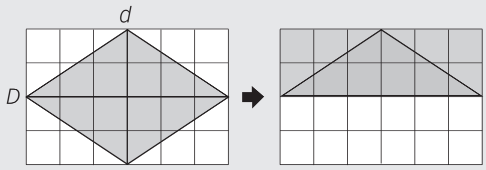
6 Halla el área de esta figura, compuesta por dos cuadrados iguales y un rectángulo.



ÁREA DEL ROMBO

El área del rectángulo es el producto de la base por la altura.

El rombo ocupa la mitad de la superficie del rectángulo.

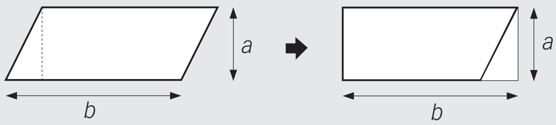


$$\textbf{Área rombo} = \frac{\textbf{diagonal mayor} \cdot \textbf{diagonal menor}}{2} = \frac{D \cdot d}{2}$$

ÁREA DEL ROMBOIDE

El romboide lo podemos transformar en rectángulo.

El área de un romboide es el área de un rectángulo de igual base y altura.



$$\textbf{Área romboide} = \textbf{base} \cdot \textbf{altura} = b \cdot h$$

7 Obtén el área de los siguientes rombos y realiza un dibujo representativo.

a) Diagonal mayor = 7 cm
Diagonal menor = 3 cm

b) Diagonal mayor = 10 cm
Diagonal menor = 5 cm

8 Calcula el área de estos romboides y haz un dibujo representativo.

a) Base = 8 cm
Altura = 2 cm

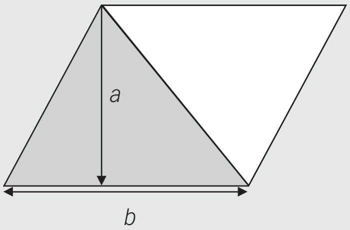
b) Base = 12 cm
Altura = 5 cm

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

10 CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

OBJETIVO 4

ÁREA DEL TRIÁNGULO

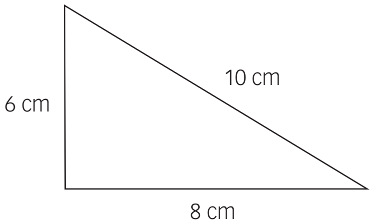


- Al trazar la diagonal del romboide, este queda dividido en dos triángulos.
- El triángulo gris y el triángulo blanco ocupan la misma superficie.
- Área triángulo $= \dfrac{\text{área de romboide}}{2} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$$\boxed{\textbf{Área triángulo} = \dfrac{\boldsymbol{b \cdot h}}{\mathbf{2}}}$$

9 Calcula el área y el perímetro de los triángulos.

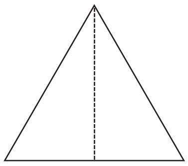
a)



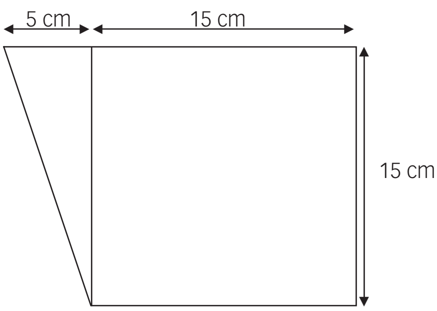
b) Triángulo equilátero

Lado = 6 cm

Altura = 5,2 cm

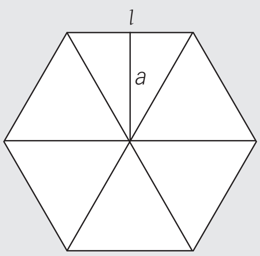


10 Obtén el área de la siguiente figura:

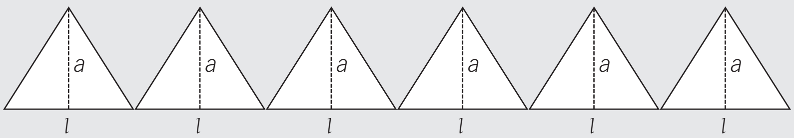


ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR

El siguiente hexágono regular se descompone en 6 triángulos iguales cuya altura es la apotema, *a*.



- Área de cada triángulo $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$



- Área de los 6 triángulos $= 6 \cdot \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

Perímetro del hexágono $= 6 \cdot l$

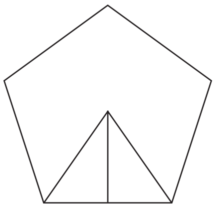
$$\boxed{\textbf{Área polígono regular} = \dfrac{\textbf{perímetro} \cdot \textbf{apotema}}{\mathbf{2}}}$$

10 CALCULAR EL ÁREA DE LOS PRINCIPALES POLÍGONOS

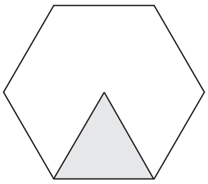
OBJETIVO 4

11 Calcula el perímetro y el área de los siguientes polígonos.

a) Pentágono regular — Lado = 5 cm; Apotema = 3,44 cm

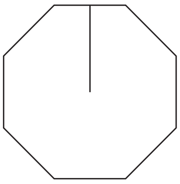


b) Hexágono regular — Área del triángulo = 15,6 cm^2; Lado = 6 cm

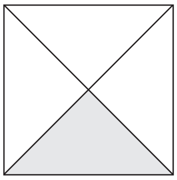


12 Determina el perímetro y el área de las figuras.

a) Octógono regular — Apotema = 2,41 cm; Lado = 2 cm

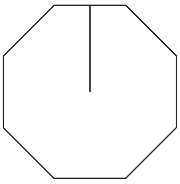


b) Cuadrado — Lado = 10 cm; Área del triángulo = 25 cm^2

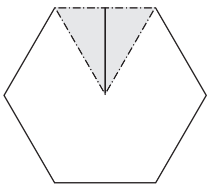


13 Halla lo que mide el lado de estos polígonos.

a) Octógono regular — Área del octógono = 1 920 cm^2; Apotema = 24 cm



b) Hexágono regular — Área del hexágono = 345 cm^2; Apotema = 10 cm

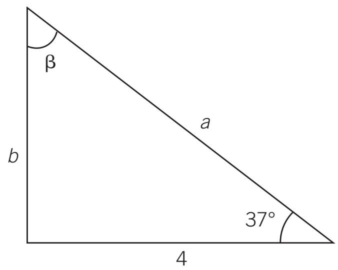


10 APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVO 5

EJEMPLO

Calcula lo que miden los lados *a* y *b*, y el ángulo β del triángulo de la figura.



Como los tres ángulos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Para calcular el otro cateto, *b*, aplicamos la definición de *tg* 37° y usamos la calculadora para hallar *tg* 37°:

$$tg\,37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

Para hallar la hipotenusa *a* podemos utilizar tres métodos:

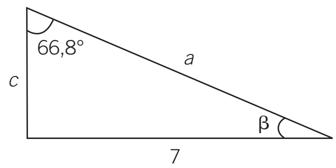
1.º Aplicar el teorema de Pitágoras.
2.º Utilizar la definición de *sen* 37°.
3.º Usar la definición de *cos* 37°.

Vamos a usar el segundo método:

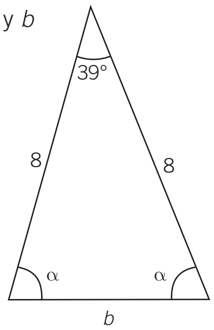
$$sen\,37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

1 **Calcula, en cada triángulo, los lados y ángulos que se indican.**

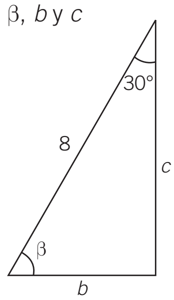
a) β, *a* y *c*



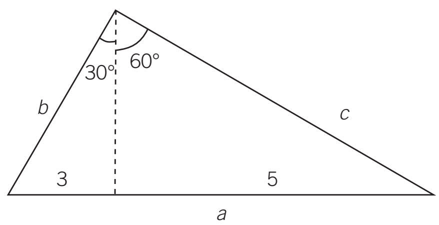
b) α y *b*



c) β, *b* y *c*

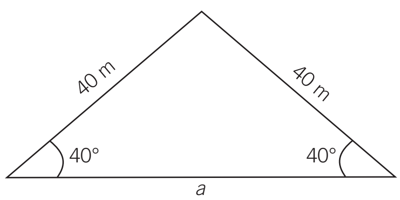


d) *a*, *b* y *c*



2 **Halla el área del siguiente triángulo.**

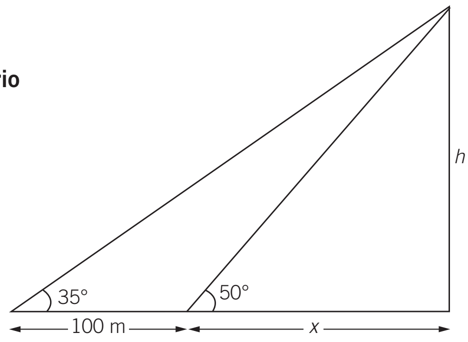
Trazamos la altura y, fijándonos en uno de los dos triángulos que se forman, hallamos *h* y la mitad de la base, $\frac{a}{2}$.



10

EJEMPLO

Desde un punto vemos el extremo superior del campanario de la iglesia bajo un ángulo de 50°. Si nos alejamos 100 m, lo vemos bajo un ángulo de 35°. Halla la altura del campanario y la distancia a la que nos encontramos inicialmente.



Este tipo de problemas se resuelven utilizando las tangentes de los dos ángulos:

$$tg\,50° = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}192x$$

$$tg\,35° = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0{,}7(100 + x)$$

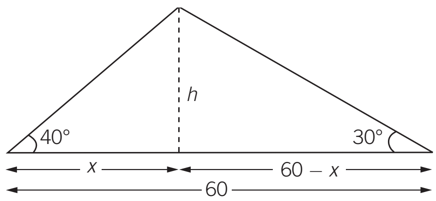
Igualando ambas, resulta:

$$1{,}192\,x = 0{,}7(100 + x) = 70 + 0{,}7x \rightarrow 0{,}492x = 70 \rightarrow x = 142{,}3 \text{ m}$$

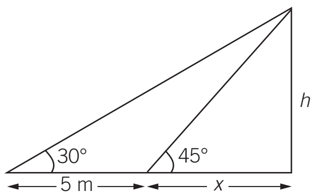
Sustituyendo en la primera de las ecuaciones, tenemos que la altura del campanario es:

$$h = 1{,}192x = 1{,}192 \cdot 142{,}3 = 169{,}6 \text{ m}$$

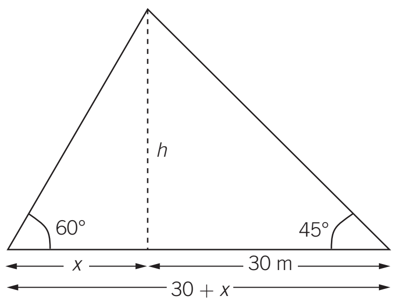
3 **Calcula la altura *h* y las distancias *x* y 60 — *x* de la figura. Utiliza las tangentes de los ángulos de 40° y 30°.**



4 **Halla los valores de *h* y *x*.**



5 **Determina la altura del árbol que, visto desde dos posiciones, distantes 30 m entre sí, forma la siguiente figura.**



10 MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

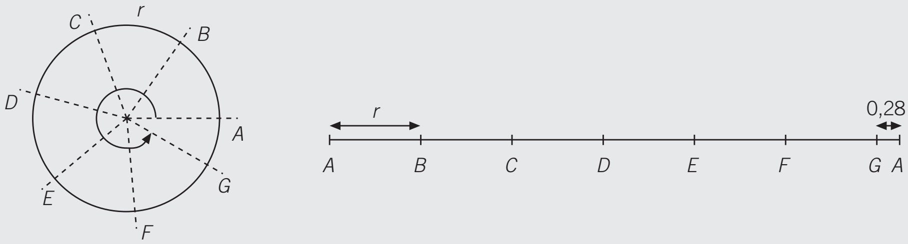
OBJETIVO 6

Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene igual longitud que el radio de una circunferencia.

Como la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, la equivalencia entre grados y radianes es:

$$\mathbf{360° = 2\pi \text{ radianes}}$$

Podemos comprobar gráficamente esta equivalencia, ya que $2\pi = 6{,}28$, que es el número de secciones en las que se cumple que el arco es igual al radio en el que podemos dividir la circunferencia.



EJEMPLO

Expresa en radianes los ángulos de 90°, 180° y 270°.

Convertimos los grados en radianes aplicando una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 90° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 180° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 2\pi}{360} = \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 270° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{270 \cdot 2\pi}{360} = \frac{3 \cdot 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

1 **Convierte en radianes los ángulos de la tabla.**

0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
0			$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 30° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

2 **Convierte en radianes los ángulos correspondientes a cada casilla.**