ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es

Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

COMPENDIO DE EJERCICIOS MÁS COMUNES/SENCILLOS

MATES II PCE

BLOQUE I - ÁLGEBRA

1. Se el polinomio ρ(x) = $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces:

   a. ρ(a) = 0 para algún valor de a>0
   b. El grado de ρ(x) es menor que 4
   c. Ninguna de las otras dos

2. Sea A una mtriz 3x3 tal que $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad, entonces:
   a. $A^{10} = A$
   b. $A^{10} = -A$
   c. $A^{10} = I$

3. Estudie la existencia de una matriz A tal que A x A = I, y calcúlela en caso afirmativo.
   Observación: A x A representa el producto de matrices.

   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde $a + d \neq 0$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la ecuación matricial $A^2 = I - 2A$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Pruebe que A es invertible y determine la matriz A^{-1} en función de A.

5. Para todo par A, B de matrices reales n x n arbitrarias:
   a. Se cumple que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.
   b. Se cumple que $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.
   c. Ninguna de las otras dos.

6. Para toda A matriz real 2 x 2 arbitraria, se cumple que:
   a. Si $A^2 = A$, entonces $A^4 = A$.
   b. Si A es simétrica, entonces $A^2 = A$.
   c. Ninguna de las otras dos.

7. Toda A matriz real arbitraria cumple:
   a. El rango de A es el número de filas no nulas.
   b. rango(A) = rango(−A).
   c. Ninguna de las anteriores.

8. Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Entonces, se cumple:

a. Si b = c, entonces rango(A) = 1.
b. Si b = 0, entonces rango(A) = 2.
c. Ninguna de las anteriores.

9. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

a. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})$, donde A^T es la traspuesta.
b. $\det(A^1) = -\det(A)$.
c. Ninguna de las anteriores.

10. Si la matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

es ortogonal, entonces:

a. $\lambda > 0$.
b. $\lambda < 0$.
c. Ninguna de las anteriores.

11. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

a. $\det(A) > 0$.
b. Si A es regular, A = I (la matriz identidad).
c. Ninguna de las anteriores.

12. Sea la matriz $C = A^2 - 4A - 6B$ donde $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudie el rango de C en función del valor del número real a.

13. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = A^{-1} - A$. Estudie el rango de la matriz B

14. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - az = 4 \\ x + ay + z = 2 \\ x + 4y - 5z = 6 \end{cases}$$

a. Determine cuántas soluciones tiene dicho sistema en función de los valores del parámetro a.
b. Resuelva el sistema para el valor a = 2.
c. Resuelva el sistema para el valora = 1.

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

BLOQUE II – GEOMETRÍA

1. Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A = (0, 2, −1) y corta a las dos rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{1-x}{-2} = \frac{1-y}{-2} = \frac{z-1}{-4}$$

2. Dados los planos:

$$\pi_1 \equiv 3x - 2y + z = 4$$
$$\pi_2 \equiv x + 3y - 2z = 2$$

   a. Hallar la ecuación de la recta que es paralela a los planos π_1 y π_2 y pasa por el punto P(0, 2, −1)
   b. Calcula la distancia de dicha recta a los planos π_1 y π_2

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

   a) (0,25 puntos) Estudiar su dominio.
   b) (0,75 puntos) Determinar sus asíntotas.
   c) (0,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   d) (0,75 puntos) Calcular sus extremos relativos y dar un esbozo de su gráfica.

4. El conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ define:

   a. Un punto en el espacio
   b. Una recta en el espacio
   c. Un plano en el espacio

5. Los vectores $\vec{v_1} = (2, -1, 0)$, $\vec{v_2} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v_3} = (3, 1, 1)$ son:

   a. Base de $\mathbb{R}^3$
   b. Linealmente independientes
   c. Linealmente dependientes

6. Dada la recta $r\!: x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = 1 - z$

   a. Calcule la distancia del punto A(1,0,1) a la recta r.
   b. Calcule la distancia de la recta r a la recta s: $s\!: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$
   c. Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano x + y + z = 1.

BLOQUE III – ANÁLISIS

1. Dada la función real $f(x) = \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$

(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a. Representar gráficamente la curva $y = f(x)$, discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.
b. Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangentes con el eje de las x?

2. Hallar el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

3. Determine $\int x^2 \cdot \ln(x^2)\,dx$

4. Sea $k = \int_{-1}^{0} \frac{x^3 - 1}{x - 1}\,dx$

a. $k < 1/2$
b. $k > 2$
c. Ninguna de las otras dos

5. Sean la función $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$ donde D es su dominio o campo de existencia y $k = \lim_{x \to \infty} f(x)$, entonces:

a. $k > 4$
b. $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) = D$
c. Ninguna de las otras dos

6. Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a. $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx$

b. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

BLOQUE IV – PROBABILIDAD

1. Se tiene un conjunto de bolas azules y bolas rojas en una bolsa. En total hay 25 bolas. Se saca una de ellas al azar y se sabe que las probabilidad de que sea roja es p, mientras que la probabilidad de que sea azul es 4p. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?
   a. Menos de 21 y más de 15.
   b. Entre 5 y 10.
   c. Ninguna de las otras dos.

2. Se lanza una moneda trucada. La probabilidad de que en dos lanzamientos se obtengan dos caras es 0,16. ¿Cuál la probabilidad p de obtener dos cruces?
   a. $0{,}8 < p < 0{,}9$.
   b. $0{,}3 < p < 0{,}4$.
   c. Ninguna de otras dos.

3. ¿Cuáles de las siguientes probabilidades pueden representar a dos eventos disjuntos A y B de un determinado espacio muestral?
   a. $p(A) = 0{,}2$ y $p(B) = 0{,}67$.
   b. $p(A) = 0{,}5$ y $p(B) = 0{,}75$.
   c. Ninguna de las dos.

4. Se pregunta a 50 consumidores si les gustan productos A y B. Hay 37 personas a las que gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las no gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?
   a. $0{,}25 < p < 0{,}3$.
   b. $0{,}2 < p < 0{,}25$.
   c. Ninguna de otras dos.

5. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A)= 0{,}6$ y $p(B)=0{,}7$. Entonces:
   a. Los sucesos A y B son tales que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total.
   b. Los sucesos A y B pueden ser disjuntos.
   c. Ninguna de las otras dos.

6. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?
   a. $0{,}1 < p < 0{,}15$.
   b. $0{,}15 < 0 < 0{,}2$.
   c. Ninguna de las otras dos.

7. En una urna hay 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 2 bolas verdes y en otra urna hay 6 bolas blancas y 8 bolas negras y 4 bolas verdes. Se han extraído dos bolas simultáneamente de una misma urna sin que se sepa de qué urna, y resulta que son blancas. Determine la probabilidad de que esas dos bolas salieran de la primera urna.