

COMPENDIO DE EJERCICIOS MÁS RAROS/DIFÍCILES

MATES II PCE

BLOQUE I - ÁLGEBRA

1. La matriz

$$A = egin{bmatrix} coslpha & senlpha \ -senlpha & coslpha \end{bmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$

a. Tiene rango(A) = 1 para ciertos valores de α .

b. Tiene rango(A) = 2 para todos los valores de α .

c. Ninguna de las otras dos.

2. Nota: Problema del B1 y B2

a) ¿Cuál es el máximo número de vectores linealmente independientes que hay en el sistema

$$E = \{(1,2,3), (1,1,1), (1,0,-1), (1,2,0)\}?$$

Mostrar explícitamente un conjunto de tales vectores.

b) ¿Existe algún vector cuya segunda componente sea igual a la suma de las otras dos y que no sea combinación lineal de los dos primeros vectores de E, (1, 2, 3) y (1, 1, 1)?

BLOQUE II - GEOMETRÍA

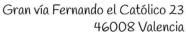
1. a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2 , con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1$$
: x + 2y - z = 3
 π_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4

en función del parámetro real a $\in \mathbb{R}$.

- b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.
- 2. Estudiar la posición relativa de las rectas según los valores de a:

$$ext{r:} egin{cases} x=1+t \ y=a \ z=-1+2t \end{cases} ext{y s:} egin{cases} x=1-2t \ y=-t \ z=1+t \end{cases}$$





3. Sean las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ y-z=1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ y+z=\alpha \end{cases}$$

Estudiar si existe un valor de a para el que las rectas están en un mismo plano y, en tal caso, calcular la ecuación de ese plano.

- 4. Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano x+2y+2x-4=0 con los ejes coordenados.
- 5. Sean la recta r determinada por los dos planos: x-2y-2z-1 = 0 y x + 5y-z = 0

Y el plano π definido por 2x + y + mz = n

Estudie los valores que deben tener m y n para que la recta y el plano sean

- a. Paralelos.
- b. Secantes.
- 6. Sea el rombo ABCD de vértices A = (3, 2, 1), B = (4, 5, 2), C = (3, 8, 3) y D = (a, b, c). Entonces:
 - a.a > c
 - b,b>c
 - c. Ninguna de las otras dos
- 7. Para todo par de vectores ortogonales v, v, si α es el ángulo que forman v y v v, entonces se cumple que:

$$0. \cos \alpha = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2}$$

b.
$$\cos^2 \alpha = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$$

c. Ninguna de las otras dos

BLOQUE III - ANÁLISIS

- 1. El valor del límite $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(\ln|x|)^2}$ es igual a:
 - a. -1/2
 - b.1
 - c.1/2
- 2. Sea la función $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$, siendo D su dominio y $k = \lim_{x \to \infty} f(x)$
 - a.k > 4
 - $b.D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 - c. Ninguna de las anteriores

46008 Valencia



- 3. El valor de la integral es: $\int_{-rac{\pi}{2}}^{rac{\pi}{2}} x^{2022} \sin\left(rac{x^3}{\cos x}
 ight) dx$
 - a. Menor que 1
 - b. Múltiplo de π
 - c. Ninguna de las otras dos.
- 4. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$$

- a. Calcule el dominio D(f) y los puntos de continuidad.
- b. Estudie si tiene asíntotas.
- c. Estudie el crecimiento y los extremos relativos.
- d. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de f y determine el conjunto imagen $Im(f) = \{f(x): x \in D(f)\}$
- 5. Calcule la siguiente integral $\int rac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$
- 6. Sea la función $f(x) = cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

$$a.f'(0) = Oyf''(0) < O$$

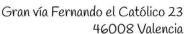
- c. Ninguna de las anteriores
- 7. El valor del $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x, es igual a

8. Calcule las siguientes integrales:

a.
$$\int x^8 \ln(x^4 + 1) dx$$

b.
$$\int \frac{e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 2x)^2} dx$$

c.
$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx$$





9. Se considera la siguiente función

f: [0, 2
$$\pi$$
] $\in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
 $x \to \cos^2 x$

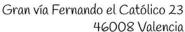
- a. Estudie si la función es par (es decir, verifica que f(x) = f(-x) para todo $x \in [0, 2\pi]$) o es impar (es decir, verifica que f(x) = -f(-x) para $x \in [0, 2\pi]$)
- b. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcula los extremos relativos si existen (en el intervalo $[0, 2\pi]$)
- c. Haga un dibujo aproximado de la gráfica f
- 10. Hallar las integrales indefinidas siguientes:

Nota: Estas integrales corresponden a problemas de años distintos.

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \qquad \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) \, dx$$

BLOQUE IV - PROBABILIDAD

- 1. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad $A \subset B$, tales que P(B A) = 0.2 y P(B) = 0.8, entonces P(A) vale
 - a. 0,4
 - b.0,6
 - c.0,8
- 2. En una reunión en la que participan 23 mujeres y 27 hombres se sortean dos regalos. Uno de ellos se sortea entre las mujeres y el otro entre los hombres. La probabilidad de que una familia formada por una madre, un padre y dos hijas obtenga algún regalo en el sorteo es aproximadamente:
 - a.0,1456
 - b.0,1536
 - c.0,1626
- 3. Dado el conjunto $C = \{a, b, c, d, e\}$ y la familia de subconjuntos $S = \{ , \{b\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, d, e\}\}$, entonces esta familia es un álgebra de sucesos si se completa con
 - a. Un suceso
 - b. Dos sucesos
 - c. Tres sucesos





- 4. En una empresa de pinturas disponen de cinco colores básicos y forman con ellos más colores combinándolos a partes iguales de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 y los 5 juntos. ¿Cuántos colores distintos, contando los cinco primeros, tendrá la fábrica?
 - a.20
 - b.16
 - c.31
- 5. Se lanzan 6 dados iguales de seis caras, que tienen dibujados en cada cara un número del 1 al 6. ¿Cuán es la probabilidad de sacar 17 puntos o más?
 - a.1/108
 - b.1/216
 - c.1/54
- 6. Se elige un número al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?
- 7. Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$):

	Nº hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	$50 - \delta$	$40 + \delta$	90
Nº valoraciones negativas	$30 + \delta$	$80 - \delta$	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a. Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.
- b. Que sea hombre y favorable al candidato.
- c. Que sea mujer o que esté a favor del candidato.
- d.¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujer" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?
- 8. Dos jugadores, A y B, están apostando a un juego de dados. El jugador A utiliza dos dados normales (no trucados), pero el jugador B utiliza un dado normal y otro trucado para que los resultados impares en este dado sean imposibles, mientras que los resultados pares sean equiprobables. Cada jugador lanza sus dos dados por turno y calcula la suma que ha obtenido en su lanzamiento. El juego consiste en que cada jugador apuesta previamente a un número: si ese número coincide con la suma que se obtiene al lanzar sus dados entonces gana el juego.
 - a.¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tienen A y B respectivamente si ambos apuestan al 7? b.¿Y si apuestan al 8?

46008 Valencia



- 9. Responda a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
 - a. Con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8 ¿cuántos números distintos de tres cifras, es decir entre 100 y 999, podemos formar?
 - b. En una clase de 13 estudiantes se quiere un grupo de 4 estudiantes para realizar un trabajo, ¿cuántos grupos distintos se pueden hacer?
 - c.¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "VIRTUAL" si las vocales tienen que estar en las posiciones pares y no se puede repetir ninguna letra?
 - d. Se lanza una moneda que no está trucada tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?