

COMPENDIO DE EJERCICIOS MÁS RAROS/DIFÍCILES

MATES II PCE

BLOQUE I – ÁLGEBRA

1. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$

- Tiene $\text{rango}(A) = 1$ para ciertos valores de α .
- Tiene $\text{rango}(A) = 2$ para todos los valores de α .
- Ninguna de las otras dos.

2. Nota: Problema del B1 y B2

a) ¿Cuál es el máximo número de vectores linealmente independientes que hay en el sistema

$$E = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, -1), (1, 2, 0)\} ?$$

Mostrar explícitamente un conjunto de tales vectores.

b) ¿Existe algún vector cuya segunda componente sea igual a la suma de las otras dos y que no sea combinación lineal de los dos primeros vectores de E , $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$?

BLOQUE II – GEOMETRÍA

1. a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2 , con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1: x + 2y - z = 3$$

$$\pi_2: ax + (a-2)y + 2z = 4$$

en función del parámetro real $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

2. Estudiar la posición relativa de las rectas según los valores de a :

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = a \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

3. Sean las rectas r y s de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

Estudiar si existe un valor de a para el que las rectas están en un mismo plano y, en tal caso, calcular la ecuación de ese plano.

4. Hallar el volumen del tetraedro que determina el plano $x+2y+2z-4=0$ con los ejes coordenados.

5. Sean la recta r determinada por los dos planos: $x-2y-2z-1=0$ y $x+5y-z=0$

Y el plano π definido por $2x+y+mz=n$

Estudie los valores que deben tener m y n para que la recta y el plano sean

a. Paralelos.

b. Secantes.

6. Sea el rombo ABCD de vértices $A = (3, 2, 1)$, $B = (4, 5, 2)$, $C = (3, 8, 3)$ y $D = (a, b, c)$. Entonces:

a. $a > c$

b. $b > c$

c. Ninguna de las otras dos

7. Para todo par de vectores ortogonales u, v , si α es el ángulo que forman u y $u - v$, entonces se cumple que:

a. $\cos \alpha = \frac{\|u\|}{\|u\|^2 - \|v\|^2}$

b. $\cos^2 \alpha = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2 + \|v\|^2}$

c. Ninguna de las otras dos

BLOQUE III - ANÁLISIS

1. El valor del límite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln|x|)^2}$ es igual a:

a. $-1/2$

b. 1

c. $1/2$

2. Sea la función $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$, siendo D su dominio y $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

a. $k > 4$

b. $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

c. Ninguna de las anteriores

3. El valor de la integral es: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2022} \sin\left(\frac{x^3}{\cos x}\right) dx$

- a. Menor que 1
- b. Múltiplo de π
- c. Ninguna de las otras dos.

4. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$$

- a. Calcule el dominio $D(f)$ y los puntos de continuidad.
- b. Estudie si tiene asíntotas.
- c. Estudie el crecimiento y los extremos relativos.
- d. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de f y determine el conjunto imagen $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$

5. Calcule la siguiente integral $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

6. Sea la función $f(x) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$

- a. $f'(0) = 0$ y $f''(0) < 0$
- b. $f'(0) > 0$ y $f''(0) < 0$
- c. Ninguna de las anteriores

7. El valor del $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$ donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x , es igual a

- a. $-1/2$
- b. 1
- c. $1/2$

8. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int x^8 \ln(x^4 + 1) dx$

b. $\int \frac{e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 2x)^2} dx$

c. $\int \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx$

9. Se considera la siguiente función

$$f: [0, 2\pi] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \cos^2 x$$

- Estudie si la función es par (es decir, verifica que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in [0, 2\pi]$) o es impar (es decir, verifica que $f(x) = -f(-x)$ para $x \in [0, 2\pi]$)
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule los extremos relativos si existen (en el intervalo $[0, 2\pi]$)
- Haga un dibujo aproximado de la gráfica f

10. Hallar las integrales indefinidas siguientes:

Nota: Estas integrales corresponden a problemas de años distintos.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x) dx$$

BLOQUE IV – PROBABILIDAD

- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad $A \subset B$, tales que $P(B - A) = 0,2$ y $P(B) = 0,8$, entonces $P(A)$ vale
 - 0,4
 - 0,6
 - 0,8
- En una reunión en la que participan 23 mujeres y 27 hombres se sortean dos regalos. Uno de ellos se sortea entre las mujeres y el otro entre los hombres. La probabilidad de que una familia formada por una madre, un padre y dos hijas obtenga algún regalo en el sorteo es aproximadamente:
 - 0,1456
 - 0,1536
 - 0,1626
- Dado el conjunto $C = \{a, b, c, d, e\}$ y la familia de subconjuntos $S = \{ \quad, \{b\}, \{b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, d, e\} \}$, entonces esta familia es un álgebra de sucesos si se completa con
 - Un suceso
 - Dos sucesos
 - Tres sucesos

4. En una empresa de pinturas disponen de cinco colores básicos y forman con ellos más colores combinándolos a partes iguales de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4 y los 5 juntos. ¿Cuántos colores distintos, contando los cinco primeros, tendrá la fábrica?

- a. 20
- b. 16
- c. 31

5. Se lanzan 6 dados iguales de seis caras, que tienen dibujados en cada cara un número del 1 al 6. ¿Cuán es la probabilidad de sacar 17 puntos o más?

- a. 1/108
- b. 1/216
- c. 1/54

6. Se elige un número al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?

7. Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$):

| | Nº hombres | Nº mujeres | Total |
|---------------------------|---------------|---------------|-------|
| Nº valoraciones positivas | $50 - \delta$ | $40 + \delta$ | 90 |
| Nº valoraciones negativas | $30 + \delta$ | $80 - \delta$ | 110 |
| Total | 80 | 120 | 200 |

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a. Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.
- b. Que sea hombre y favorable al candidato.
- c. Que sea mujer o que esté a favor del candidato.
- d. ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujer" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

8. Dos jugadores, A y B, están apostando a un juego de dados. El jugador A utiliza dos dados normales (no trucados), pero el jugador B utiliza un dado normal y otro trucado para que los resultados impares en este dado sean imposibles, mientras que los resultados pares sean equiprobables. Cada jugador lanza sus dos dados por turno y calcula la suma que ha obtenido en su lanzamiento. El juego consiste en que cada jugador apuesta previamente a un número: si ese número coincide con la suma que se obtiene al lanzar sus dados entonces gana el juego.

- a. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar que tienen A y B respectivamente si ambos apuestan al 7?
- b. ¿Y si apuestan al 8?

9. Responda a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

- a. Con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8 ¿cuántos números distintos de tres cifras, es decir entre 100 y 999, podemos formar?
- b. En una clase de 13 estudiantes se quiere un grupo de 4 estudiantes para realizar un trabajo, ¿cuántos grupos distintos se pueden hacer?
- c. ¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "VIRTUAL" si las vocales tienen que estar en las posiciones pares y no se puede repetir ninguna letra?
- d. Se lanza una moneda que no está trucada tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?