TEMA 5: DERIVADAS

1) Derivada de una función en un punto

Sea $f(x)$ una función real de variable real y sea a un número real.

Se dice que $f(x)$ **es derivable en el punto** a $\Leftrightarrow$ existe el $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

A este límite se le denota por $f'(a)$ y se llama derivada de $f(x)$ en el punto $x=a$

Por tanto: $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si existe la derivada de una función en un punto, será un <u>número real</u>. Si no existe este límite, se dice que la función que no es derivable en el punto a. Intuitivamente significa, bien que la gráfica de la función se rompe en ese punto, es decir, es discontinua, bien que en el punto la función cambia bruscamente de dirección.

- **Ejemplo 1.** Sea la función $f(x)=x^2$. Veamos que la función es derivable en el punto $x=3$.
  Calculemos el límite correspondiente aplicando la definición de derivada:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-(3)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3^2+6h+h^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6$$

  Por tanto la derivada de la función $f(x)=x^2$ en el punto $x=3$ es 6.

<u>**Importante:**</u> Siempre que nos pidan la derivada de una función en un punto utilizando **la definición de derivada, se aplicará la fórmula anterior**, y de los términos del numerador se extrae h factor común, **quedando una expresión que siempre es divisible por la h del denominador** para eliminarla (si no se va, es que hemos fallado en algún cálculo)

<u>Derivadas laterales en un punto</u>

Al $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=(f')^-(a)$ se le llama <u>derivada por la izquierda</u> de $\Leftrightarrow$ en el punto

Al $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=(f')^+(a)$ se le llama <u>derivada por la derecha</u> de $\Leftrightarrow$ en el punto

Entonces, **para que una función $\Leftrightarrow$ sea derivable en el punto** debe existir la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha y coincidir. Las derivadas por la izquierda y por la derecha se llaman **derivadas laterales.** Esta propiedad se aplica en el cálculo de derivadas de las funciones definidas a trozos.

➢ **Ejemplo 2.** Calcular la derivada de la función $f(x)=|x|$ en el punto $x=0$

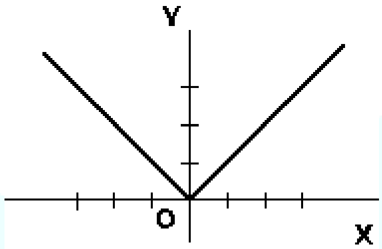
Recordemos que la función $f(x)=|x|$ se puede escribir de la forma siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} -x & si\ x<0 \\ x & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

Calculemos $f'(0)$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1 \\ \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\ \ 1 \end{cases}$$

Por tanto, al no coincidir las derivadas laterales, no existe $f'(0)$ y la función $f(x)=|x|$ no será derivable en el punto $x=0$. Si la representamos gráficamente, observamos que en el punto $x=0$ la gráfica cambia bruscamente de dirección:



Una función $\Leftrightarrow$ **es derivable en un intervalo abierto** (a,b) si lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

➢ **Ejemplo 3** de derivación:

- **La derivada de cualquier función constante vale 0 en cualquier punto →** $f(x)=c$, $c\in R$

  En efecto: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{0}{x-a}=\lim_{x\to a}0=0$$

-

- **La derivada de la función f(x) = x en cualquier punto vale 1.**

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=\lim_{x\to a}1=1$$

- Ejemplo de **derivada de un polinomio:** Derivada de f(x) = x^2+3x-1 en el punto x = 2.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1-(2^2+3.2-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}\underset{\frac{0}{0}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(x+5)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+5)=7$$

- Ejemplo de derivada de una función **en cualquier punto**: $y = x^3$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2$$

2) Derivabilidad y continuidad

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.

Derivable → Continua

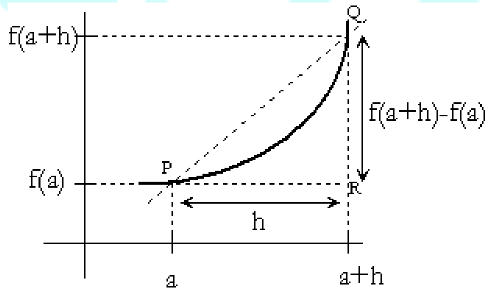
Sin embargo, <u>no se cumple siempre el recíproco</u>, puesto que hay funciones continuas en ciertos puntos, en los que no hay derivada. (Ver el caso de $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$)

Derivable $\not\leftarrow$ Continua

<u>**Criterio de no derivabilidad**</u>: El resultado anterior nos permite asegurar que si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en él. Se estudiará, por tanto, siempre la continuidad.

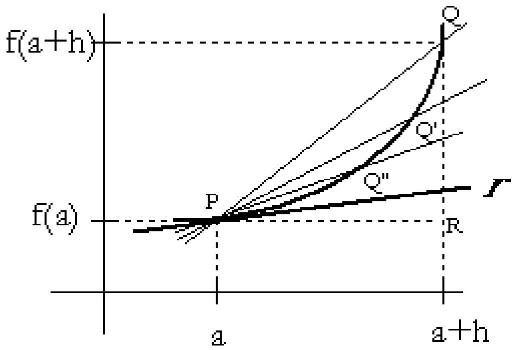
3) Interpretación geométrica de la derivada

Si observamos la siguiente gráfica:



La pendiente de la recta PQ, secante a la curva, viene dada por: $M_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Si vemos lo que ocurre <u>gráficamente</u> al calcular el límite, es decir, cuando tomamos dos puntos tan próximos que $h \to 0$, $a+h$ tenderá a $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y el punto Q tiende a desplazarse a los puntos Q', Q'', etc. Acercándose al punto P, y en el límite coincidirá con él, con lo que la recta secante PQ, en el límite, <u>tiende a la recta tangente</u> r a la curva en el punto P.



Entonces, cuando $h \to 0$ la recta secante tiende a la recta tangente, y la pendiente de la recta secante $m_{PQ} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tiende a la pendiente de la recta tangente $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, que es la derivada de la función en el punto $f'(a)$:

La **derivada** de una función f(x) en un punto x=a, coincide con la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función ese punto (a, f(a)) :   **f ' (a) = m**

4) Operaciones con funciones derivables.

Si $\Longleftrightarrow$ y $g(x)$ son funciones derivables en un punto y c es una constante ($c \in R$), entonces la suma, diferencia, producto por un número real, producto y cociente de funciones polinómicas son derivables y sus derivadas se calculan por las reglas siguientes:

1. La derivada de una **suma (o diferencia)** de funciones es la suma (diferencia) de las derivadas.
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
2. La derivada de un **producto de una constante k por una función**, es la constante por la derivada de la función. $(k.f)'(x) = k.f'(x)$
3. La derivada de un **producto de dos funciones** es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.
$$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$
4. La derivada de un **cociente de dos funciones** es igual al cociente entre la derivada de la primera por la segunda sin derivar menos la primera sin derivar por la derivada de la segunda y el cuadrado de la segunda sin derivar
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} \quad \text{con } g(x) \neq 0 \ \forall x \in R$$
Por tanto, un cociente de dos funciones derivables (por ejemplo un cociente de dos funciones polinómicas) será derivable en todos los puntos en que no se anule el denominador.

5) Derivadas de las funciones elementales.

Aplicando la definición de derivada a cualquier obtenemos las siguientes reglas de derivación, que resumimos en una tabla que llamaremos **tabla de derivadas inmediatas:**

TABLA DE DERIVADAS INMEDIATAS

FUNCIÓN	DERIVADA	EJEMPLOS	
Constante			
$y = k$	$y' = 0$	$y = 8$	$y' = 0$
Identidad			
$y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y' = 1$
Potenciales			
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = x^7$	$y' = 7 \cdot x^6$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x}} \cdot 5$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[7]{5x}$	$y' = \frac{1}{7 \cdot \sqrt[7]{(5x)^6}} \cdot 5$
Operaciones			
$y = k \cdot x$	$y' = k$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 3 \cdot 2x - 2$
$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$y = x^2 \cdot \cos x$	$y' = 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-sen x)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$y = \frac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \frac{2 \cdot 2x \cdot (x^3 - 1) - 2x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$
Exponenciales			
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{3x^2 - 1}$	$y' = e^{3x^2 - 1} \cdot (6x)$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 5^{3x-4} \cdot (\ln 5) \cdot 3$
Logarítmicas			
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln(x^2 + 7x)$	$y' = \frac{1}{x^2 + 7x} \cdot (2x + 7)$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_2(5x + 7)$	$y' = \frac{1}{5x + 7} \cdot (\log_2 e) \cdot 5$
Trigonométricas			
$y = sen x$	$y' = \cos x$	$y = sen 5x$	$y' = (\cos 5x) \cdot 5$
$y = \cos x$	$y' = -sen x$	$y = \cos 3x^2$	$y' = (-sen 3x^2) \cdot 6x$
$y = tg x$	$y' = \sec^2 x$	$y = tg 7x$	$y' = (\sec^2 7x) \cdot 7$
$y = cosec x$	$y' = -cosec x \cdot cotg x$	$y = cosec x^2$	$y' = -cosec x^2 \cdot cotg x^2 \cdot 2x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot tg x$	$y = \sec x^3$	$y' = \sec x^3 \cdot tg x^3 \cdot 3x^2$
$y = cotg x$	$y' = -cosec^2 x$	$y = cotg(4x + 5)$	$y' = -cosec^2 (4x + 5) \cdot 4$
$y = arcsen x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arcsen x^2$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot 2x$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos(3x^2 - 2x)$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (3x^2 - 2x)^2}} \cdot (6x - 2)$
$y = arctg x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = arctg 3x$	$y' = \frac{1}{1 + (3x)^2} \cdot 3$
$y = arccosec x$	$y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$y = arccosec 5x^2$	$y' = \frac{-1}{5x^2\sqrt{(5x^2)^2 - 1}} \cdot 10x$
$y = arcsec x$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$y = arcsec 7x$	$y' = \frac{1}{7x\sqrt{(7x)^2 - 1}} \cdot 7$
$y = arccotg x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$	$y = arccotg 3x^2$	$y' = \frac{-1}{1 + (3x^2)^2} \cdot 6x$

Fuente: mates1carniceros.blogspot.com

- **Ejemplo 4:** Halla la derivada de $y = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2+1}$

Se trata de un <u>cociente</u> de funciones polinómicas.
Aplicando las reglas que conocemos (derivada de un polinomio y de un cociente), tenemos:

$$y' = \frac{(3x^2-2x).(x^2+1)-(x^3-x^2).2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^3-2x-2x^4+2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}$$

- **Ejemplo 5:** Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x^2+1 & \text{si } x>1 \end{cases} \qquad \text{entonces} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

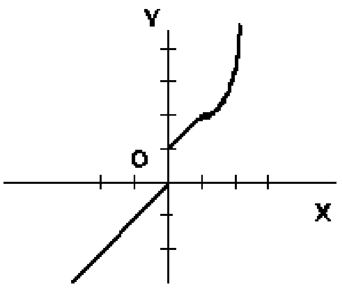
Siempre que se pida **la derivabilidad** en este tipo de funciones **(definidas a trozos), hay que estudiar primero la continuidad, pues si no es continua no puede ser derivable.**
Por ser funciones **polinómicas**, las funciones son continuas y también derivables en todos los puntos de R a excepción del 0 y el 1 que hay que estudiarlos por separado.

- En el **punto x=0**, es discontinua puesto que el límite por la izquierda es 0 y el límite por la derecha es 1, y aunque las derivadas laterales coinciden, no es derivable, ya que no es continua, por eso es necesario estudiar primero la continuidad.

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1 \end{cases} \qquad \text{Derivabilidad: } \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

- En el **punto x=1**, el límite por la izquierda y el límite por la derecha valen 2, y por tanto es continua. Sin embargo, vemos que no es derivable (gráficamente se observa un cambio brusco de pendiente)

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2+1 = 2 \end{cases} \qquad \text{Derivabilidad: } \begin{cases} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = 2\cdot 1 = 2 \end{cases}$$



$f'(1^-) \neq f'(1^+)$
Por tanto, la función es derivable en $R - \{0,1\}$

5.1. Derivadas sucesivas

Dada una función $\Longleftrightarrow$ derivable, podemos hallar su derivada $f'(x)$. Si esta a su vez es derivable podemos hallar su derivada $(f')'(x)$ que abreviaremos $f''(x)$ y llamaremos derivada segunda. Si seguimos con el proceso obtendremos la deriva tercera $f'''(x)$, la cuarta $f^{IV}(x)$ ...

5.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Se conoce como regla de la cadena la regla que nos da la derivada de una función compuesta.

Sea $\Longleftrightarrow$ una función derivable en un punto y $g(x)$ derivable en $x=0$ ($a \in R$). Entonces, la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es derivable en a y se cumple:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

fórmula que aplicaremos con la variable x, así:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$$

- **Ejemplo 6.** Calcular la derivada de la función $y=(sen\ x)^4$.

Para derivar una función compuesta $y=(sen\ x)^4$, **se deriva de fuera hacia dentro**, derivando primero la potencia (afecta a todo) y multiplicando por la derivada de la función que hay dentro.

Por tanto: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x) = 4.sen^3 x.\cos x$

- **Ejemplo 7**: Hallar la derivada de $y=(2x^3-4x)^3$

Para derivar una función compuesta $y=(2x^3-4x)^3$, **se deriva de fuera hacia dentro**, derivando primero la potencia (afecta a todo) y multiplicando por la derivada de la función que hay dentro.

$$y' = 3.(2x^3-4x)^2.(6x^2-4)$$

Nota: En el caso de la composición de más de dos funciones, se procede de manera similar. Así si la composición es de tres funciones, la fórmula de la regla de la cadena queda:

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'((g \circ f)(x)).g'(f(x)).f'(x)$$

En otras palabras, se va derivando de fuera hacia dentro, multiplicando los resultados hasta llegar a derivar la última función que está en el interior de la función compuesta (de ahí el nombre de regla de la cadena, pues se van encadenando sucesivamente las derivadas obtenidas).

- **Ejemplo 8**: Calcular la derivada de la función $y=\sqrt{(x^2+3x)^3}$

La derivada será: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{(x^2+3x)^3}}.3.(x^2+3x)^2.(2x+3) = \dfrac{3.(x^2+3x)^2.(2x+3)}{2\sqrt{(x^2+3x)^3}}$

donde hemos derivado primero la raíz (afecta a todo), después lo que hay dentro de la raíz (que es una potencia) y finalmente hemos derivado la función polinómica. Se opera y se simplifica.

- **Ejemplo 9**: Calcular la derivada de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+sen^3(3x-1)^2}{6}$

  Como el denominador es una constante, podemos escribir f(x) = $\frac{1}{6}\cdot(3x^2+sen^3(3x-1)^2)$:

  $$f'(x)=\frac{1}{6}\boldsymbol{\cdot}\left[6x+3\boldsymbol{.}sen^2(3x-1)^2\boldsymbol{.cos}(3x-1)^2\boldsymbol{.}2\boldsymbol{.}(3x-1)\boldsymbol{.}3\right]=$$
  $$=\frac{1}{6}\boldsymbol{\cdot}\left[6x+18\boldsymbol{.}(3x-1)\boldsymbol{.}sen^2(3x-1)^2\boldsymbol{.cos}(3x-1)^2\right]=$$
  $$=x+3\boldsymbol{.}(3x-1)\boldsymbol{.}sen^2(3x-1)^2\boldsymbol{.cos}(3x-1)^2$$

- **Ejemplo 10**: Calcular la derivada de la función $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$

  Se trata de un cociente de funciones:

  $$f'(x)=\frac{\cos x.e^x-\operatorname{sen}x.e^x}{e^{2x}}=\frac{\cos x-\operatorname{sen}x}{e^x}$$

5.3. Derivación logarítmica

Hay funciones que no se pueden derivar por simple aplicación de las reglas de derivación. Cuando nos dan una función elevada a otra función, por ejemplo $\boldsymbol{y=x^x}$, vemos que es una función potencial y exponencial a la vez.

Para su derivación utilizaremos la **técnica logarítmica** que consiste en aplicar los pasos siguientes:

- **Ejemplo 11:** Calcular la derivada de la función y = x^x

  1. Tomamos logaritmos neperianos a ambos lados de la igualdad: ln y = ln x^x
  2. Aplicamos la propiedad del logaritmo de una potencia: ln y = x·ln x
  3. Derivamos ambos miembros. $\frac{y'}{y}$ = 1·ln x + x· $\frac{1}{x}$
  4. Despejamos y´ y simplificamos: y´= y·(ln x + 1)
  5. Sustituimos la y por su valor: y´= x^x · (lnx + 1)

6) Ejercicios propuestos

Derivadas inmediatas

1. Halla la función derivada de:

a) $f(x)=3x^4-2x+5$
b) $f(x)=e^x$
c) $f(x)=2x^3-x^2+1$
d) $f(x)=\ln x$
e) $f(x)=2x^5+\frac{x}{3}$
f) $f(x)=\operatorname{sen} x$
g) $f(x)=x^3-3x^2+\frac{1}{5}$
h) $f(x)=\cos x$
i) $f(x)=4x^3-3x^2+2$
j) $f(x)=\operatorname{tg} x$
k) $f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$
l) $f(x)=xe^x$
m) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-2}$
n) $f(x)=x^2\operatorname{sen} x$
ñ) $f(x)=\frac{1-x^2}{x-3}$
o) $f(x)=x\ln x$
p) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{x}$
q) $f(x)=\frac{3x+1}{e^x}$
r) $f(x)=\frac{3x^2}{2x+3}$
s) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{sen} x$

2. Halla la función derivada de:

a) $f(x)=(3x^2+x)^4$
b) $f(x)=\sqrt{4x^3+1}$
c) $f(x)=e^{4x^3-2x}$
d) $f(x)=\ln(3x^4-2x)$
e) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$
f) $f(x)=3x^4-\frac{9x^2}{3}$
g) $f(x)=\frac{3x^2-2}{x^2-1}$
h) $f(x)=xe^x$
i) $f(x)=8x^5-2x^3+\frac{1}{3}$
j) $f(x)=(x^4-3x)e^x$
k) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$
l) $f(x)=\frac{3x^4}{2}-\frac{6x^3}{5}$
m) $f(x)=\frac{x^2-3}{2x^3+1}$
n) $f(x)=\ln(x^4-2x)$
ñ) $f(x)=\frac{-2x^4+3x^2}{5}$
o) $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+3x}$
p) $f(x)=\sqrt{2x^3-3}$
q) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{5}x^7$
r) $f(x)=e^x\cdot\operatorname{sen}x$
s) $f(x)=\cos\left(\frac{3x}{x^2+2}\right)$
t) $f(x)=4x^5-\frac{2x}{3}$
u) $f(x)=(x^2-3x)e^x$
v) $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$
w) $f(x)=-x^7+\frac{3}{4}x-1$
x) $f(x)=\frac{4x^3-3}{x^2-1}$
y) $f(x)=e^{7x^4-3}$
z) $f(x)=9x^2-3x^4+\frac{1}{3}$
1) $f(x)=\frac{3x^3}{4-x^2}$
2) $f(x)=\ln(2x^5+3x)$
3) $f(x)=\frac{-3x^5+2x}{7}$
4) $f(x)=x^4\cos x$
5) $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}$
6) $f(x)=\frac{4x^6}{3}-2x+5$
7) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$
8) $f(x)=\sqrt{2x-3x^4}$

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(e^x + x^5\right)^3$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{(x+2)^2}$

c) $f(x) = \left(x^2 + \sqrt{x}\right) \cdot \ln x$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

e) $y = e^{2x+1} \cdot \operatorname{sen} x$

f) $y = \ln\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)$

g) $y = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2}$

h) $y = \cos^2\left(x^4 - 2\right)$

i) $f(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^x$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{4x+2}}$

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

Continuidad y derivabilidad

NOTA: Una función es derivable en un punto cuando también es continua en el mismo punto.

1. Considera la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde a es un número real.
a) Calcula lim cuando x →0 y comprueba que f(x) es continua en x = 0.
b) ¿Para qué valor del parámetro a la función f(x) es derivable en x = 0?
(Cataluña. Septiembre 2001. Cuestión 3)

2. Determina el valor de a, si existe, para el cual la siguiente función es derivable en x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Calcula a para que f sea continua en x = 2. Para el valor obtenido, ¿es f derivable en x = 2?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(Galicia. Junio 2007. Bloque 3. Opción 1)

4. Discutir según los valores de m la continuidad y la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Canarias. Septiembre 2004. Opción A. Cuestión 1)

5. Calcular los valores de a y b para que la función f (x) sea continua para todo valor de x.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2+b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

Estudiar la derivabilidad de f(x) para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.
(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 2)

6. Determina los valores de a y b para que la siguiente función sea derivable en todos los puntos.
(Canarias. Junio 2006. Opción B. Cuestión 2)

$$f(x) = \begin{cases} bx^2+ax & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. Halla los valores que deben tener a y b para que la siguiente función sea derivable en x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e+\operatorname{sen} x) & \text{si } x<0 \\ x^3+ax+b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

8. Calcula razonadamente los valores de m y n para que la siguiente función sea derivable en x = 4.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2+mx+n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Bibliografía

- Matemáticas (Acceso a la Universidad) – Editorial Sanz y Torres (M. E. Ballvé y otros)
- mates1carniceros.blogspot.com