

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_c , con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.

Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado, $M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, por la matriz M_c

obtenida en el paso anterior.

El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

- a) (0,5 puntos) Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.
b) (0,5 puntos) Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) (1 punto) Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso

descrito arriba, ¿cuál es el mensaje original?

- d) (0,5 puntos) Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E , ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 (2,5 puntos) Sean u y v dos vectores no nulos de \mathbb{R}^3 perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si a , b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u , v y w .

2.2 a) (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) (1,5 puntos) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1, 2, 3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0, 1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en \mathbb{R} . Definimos como error de la aproximación la expresión

$$\text{err}(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 dx.$$

- a) (1,5 puntos) Comprueba que $\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$.
- b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

3.2 a) (1,25 puntos) Calcula

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \text{sen}(x^2)}{1 - \cos(x)}.$$

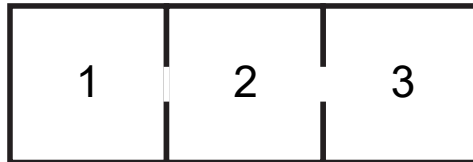
b) (1,25 puntos) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2(x) \text{sen}(x), \quad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

- a) (0,5 puntos) Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.
- b) (1 punto) Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?
- c) (1 punto) Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es $1/2$ y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de $1/4$ para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?
- 4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.
- a) (1 punto) Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?
- b) (1,5 puntos) Si $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup \overline{B})$?

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

El diseño de esta prueba no solo se centra en evaluar la adquisición de conocimientos matemáticos, sino también en valorar **la integración de los saberes y las competencias específicas**. Entre ellas, destaca la capacidad de **modelización y resolución de problemas**, y su aplicación para abordar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito científico. **Los estudiantes deberán justificar sus procedimientos y cómo llegaron a sus conclusiones, explicando por qué estas son válidas dentro del contexto del problema.** Aquí se valorará especialmente que los estudiantes puedan explicar procedimientos de forma comprensible.

En conjunto, la evaluación no solo tomará en cuenta la corrección de los procedimientos utilizados, sino también la capacidad de los estudiantes para conectar ideas matemáticas y aplicar los saberes adquiridos a contextos reales, alineando su aprendizaje con los criterios de evaluación establecidos en el currículo.

Criterios adicionales:

- **Planteamiento y explicaciones:** En las respuestas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas. En ningún caso se otorgará la calificación máxima cuando únicamente se dé el resultado sin aportar ningún cálculo ni explicación. También se evaluará negativamente (con, hasta un máximo de un punto en el examen) la falta de rigor matemático, un mal uso de los símbolos matemáticos o del lenguaje y explicaciones poco claras.
- **Errores y coherencia:** Si se comete un error en una parte de la pregunta que afecta a los resultados posteriores, se valorará si hay coherencia con el resultado erróneo. En tal caso, se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación. Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 puntos. **Resultados absurdos**, como 3,5 personas o probabilidades mayores que uno o negativas, serán penalizados. Sin embargo, si los estudiantes reconocen y justifican que estos resultados no son posibles y pueden deberse a errores en cálculos anteriores, la penalización será menor.

1. (2,5 puntos)

- a) (0,5 puntos) Por errores en la conversión con la tabla se penalizará 0,1 puntos. Si el producto que realizan (formalmente) no es adecuado, se puntuará con 0 el apartado.
- b) (0,5 puntos) Decir que se resuelve el sistema $M_E M_c = M_{\text{final}}$ donde M_c es el vector de incógnitas y después se usa la tabla para convertir las componentes de M_c en letras y obtener el mensaje. La explicación puede ser con palabras o con uso de expresiones matemáticas. La puntuación no depende de que expliciten un método concreto de resolución del sistema.
- c) (1 punto) Plantear correctamente el sistema a resolver 0,2 puntos. Resolver correctamente el sistema (por cualquier método válido) 0,7 puntos. Obtener el mensaje final 0,1 puntos. Si, al resolver el problema, obtienen algún valor que no esté en la tabla y no dicen nada al respecto, se penalizará con 0,3 puntos (además de la penalización que corresponda por el error del que venga el mal resultado).
- d) (0,5 puntos) Justificación de que es necesario que sea regular para que el sistema tenga solución única. Si la justificación que se da es para que el sistema sea compatible, la respuesta no se dará por válida.

2.1. (2,5 puntos) Clasificación correcta como vector o escalar 0,2 por cada uno. a paralelo a w 0,5 puntos. a perpendicular a los otros dos vectores 0,3 puntos. b paralelo a w 0,8 puntos. b perpendicular a los otros dos vectores 0,3 puntos.

2.2. (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Obtener el vector normal al plano 0,5 puntos.
- b) (1,5 puntos) Obtener el vector director de la recta r 0,5 puntos. Obtener un segundo vector director del plano 0,5 puntos. La resolución será válida por cualquier método correcto y justificado.

3.1. (2,5 puntos)

- a) (1,5 puntos) Expresar adecuadamente el cuadrado de la diferencia 0,2 puntos. Cálculo correcto de la primitiva 0,8 puntos. Uso correcto de la regla de Barrow 0,5 puntos. Si el resultado final no se corresponde con la expresión correcta y no se dice nada al respecto, se penalizará con 0,3 puntos (además de la penalización que corresponda por el error del que venga el mal resultado).
- b) (1 punto) Cálculo correcto de la derivada 0,3 puntos. Cálculo del valor donde la derivada se anula 0,2 puntos. Comprobación de que es un mínimo 0,3 puntos. Evaluación correcta de $\text{err}(m)$ para obtener el error mínimo 0,2 puntos.

3.2. (2,5 puntos)

- a) (1,25 puntos) Los pasos en el cálculo del límite deben estar claros y la calificación debe tenerlos en cuenta.
- b) (1,25 puntos) Comprobación del signo de la función en el intervalo 0,25 puntos. Cálculo correcto de la primitiva 0,8 puntos. Uso correcto de la regla de Barrow 0,2 puntos. Si no pone las unidades, se penalizará 0,1 puntos.

4.1. (2,5 puntos)

- a) (0,5 puntos) No hay puntuaciones intermedias.
- b) (1 punto) Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,3 puntos.
- c) (1 punto) Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Debe contestarse en probabilidad. Si no se da la probabilidad, se descontará 0,3 puntos. Si sólo se proporciona la probabilidad de una de las tres casillas 0,4 puntos. Si la suma de las tres probabilidades obtenidas no es 1 y no se dice nada al respecto, se penalizará con 0,3 puntos.

4.2. (2,5 puntos)

- a) (1 punto) Razonar que, si son independientes, $P(A)=P(A|B)$ y $P(B)=P(B|A)$ 0,3 puntos. Cálculo de la probabilidad de la intersección 0,3 puntos.
- b) (1,5 puntos) Válida cualquier estrategia para determinar la probabilidad, si es coherente y correcta. Cálculo de cada una de las tres probabilidades pedidas 0,5 puntos. Si alguna de las probabilidades pedidas no es calculada, pero se obtiene algún valor que podría servir como paso intermedio, se valorará parcialmente. Si alguna de las probabilidades obtenidas toma un valor fuera del intervalo $[0,1]$ y no se dice nada al respecto, se penalizará con 0,5 puntos (además de las penalizaciones correspondientes a los errores asociados).