DIRECTRICES Y ORIENTACIONES GENERALES PARA LA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN

Curso: 2025-2026 **Asignatura:** **MATEMÁTICAS II**

1^o. Comentarios acerca del programa del segundo curso del Bachillerato, en relación con la Prueba de Acceso y Admisión a la Universidad.

La siguiente relación de saberes básicos tiene como finalidad servir de orientación para la preparación de la prueba de Matemáticas II en la Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad.

Se hace notar que la correcta aplicación de estos contenidos en la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) requiere dominar también las bases establecidas en el primer curso de Bachillerato.

Esta relación se adapta a lo recogido en el “Real Decreto 534/2024, de 11 de junio, por el que se regulan los requisitos de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado, las características básicas de la prueba de acceso y la normativa básica de los procedimientos de admisión”, el “Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato”, el “Decreto 103/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía” y la “Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado”.

A. SENTIDO NUMÉRICO.

- Adición de vectores. Producto de un escalar por un vector. Producto escalar de dos vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones. Producto vectorial de dos vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones. Producto mixto de tres vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones.
- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
- Conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.
- Conceptos de matriz fila, columna, cuadrada, diagonal, triangular, nula, identidad, traspuesta, simétrica y antisimétrica.
- Adición y producto de matrices. Producto de un escalar por una matriz. Uso adecuado de las propiedades.
- Potencia de una matriz cuadrada: cálculo de la potencia de una matriz en situaciones cíclicas.
- Determinantes: definición, propiedades y cálculo.
- Matriz inversa: definición, propiedades y cálculo.
- Cálculo del rango de una matriz, posiblemente dependiente de uno o varios parámetros, aplicando el método de Gauss o determinantes.

B. SENTIDO DE LA MEDIDA.

- Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Aplicación de los conceptos de límite de una función en un punto (tanto finito como infinito) y de límites laterales para estudiar la continuidad de una función y la existencia de asíntotas verticales.
- Aplicación del concepto de límite de una función en el infinito para el estudio de la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas.

- Continuidad de una función en un punto. Continuidad en un intervalo.
- Tipos de discontinuidad: evitable, no evitable de salto finito o infinito.
- Conocimiento de las propiedades algebraicas de las funciones continuas y esbozo de la gráfica de la función, especialmente, en un entorno de los puntos de discontinuidad.
- Conocimiento de la relación existente entre continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
- Distinción entre función derivada y el valor de la derivada de una función en un punto. Determinación del dominio de derivabilidad de una función.
- Derivadas: interpretación y aplicación al cálculo de límites (regla de L'Hôpital).
- Derivadas laterales.
- Determinación, usando la derivación, de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
- Determinación de la ecuación de la recta tangente y de la ecuación de la recta normal a la gráfica de una función en un punto.
- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad al esbozo y al estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.
- Determinación, usando la derivación, de los intervalos de concavidad ($f''(x) < 0$) y convexidad ($f''(x) > 0$) de una función.
- Continuidad y derivabilidad de funciones definidas a trozos.
- Conocimiento y uso del teorema de derivación para funciones compuestas (la regla de la cadena).
- Estudio de los puntos críticos de una función (puntos con derivada nula) y los puntos en los que la función no es derivable.
- Uso de la teoría de funciones continuas y de funciones derivables para resolver problemas de extremos relativos y absolutos.
- Resolución de problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, e interpretación del resultado obtenido dentro del contexto.
- Estudio y representación gráfica, de manera aproximada, de funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y definidas a trozos a partir de sus propiedades globales y locales obtenidas empleando las herramientas del análisis (límites y derivadas).
- Representación de forma aproximada de la gráfica de una función de la forma $y = f(x)$ indicando: dominio, simetrías, periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión.
- Conocida la representación gráfica de una función o de su derivada, obtener información de la propia función (límites, límites laterales, continuidad, asíntotas, derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, etc.).
- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Concepto de primitiva. Propiedades.
- Primitivas inmediatas.
- Primitivas de funciones racionales en las que las raíces del denominador son reales.
- Método de integración por partes (aplicándolo reiteradamente).
- Técnica de integración por cambio de variable.
- Relación existente entre dos primitivas de una misma función.

- Dada una familia de primitivas, saber determinar aquella cuya gráfica pase por un punto dado.
- Aplicación de la regla de Barrow.
- Conocer la propiedad de linealidad de la integral con respecto al integrando y conocer la propiedad de aditividad con respecto al intervalo de integración.
- Cálculo de áreas mediante integrales definidas.
- Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas y volúmenes de revolución al girar alrededor del eje OX.
- La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios: interpretación subjetiva, clásica y frecuentista.

C. SENTIDO ESPACIAL.

- Objetos geométricos de tres dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
- Resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados mediante coordenadas cartesianas y vectores.
- Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función del contexto.
- Ecuaciones de una recta y de un plano en el espacio tridimensional.
- Construcción del plano que contiene a una recta y pasa por un punto exterior.
- Construcción del plano que contiene a dos rectas paralelas o secantes.
- Construcción de la recta que corta perpendicularmente a dos rectas que se cruzan en el espacio.
- Construcción de la recta que pasa por un punto exterior a dos rectas que se cruzan y corta a ambas.
- Estudio de la posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio.
- Planteamiento y resolución de problemas de geometría afín relacionados con la incidencia y el paralelismo de rectas y planos en el espacio tridimensional.
- Planteamiento y resolución de problemas de geometría métrica relacionados con la medida de ángulos entre rectas y planos, la medida de distancias entre puntos, rectas y planos y la ortogonalidad entre rectas y planos.
- Interpretar un problema de posiciones relativas de planos y/o rectas como análisis de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
- Vectores normales a un plano, perpendicular común a dos rectas que se cruzan, vector perpendicular a otros dos, áreas de triángulos y paralelogramos y volúmenes de tetraedros y paralelepípedos.
- Estudio de la simetría en el espacio: punto simétrico respecto de otro punto, respecto de un plano y respecto de una recta.
- Recta simétrica respecto de un plano; recta proyección ortogonal sobre un plano.

D. SENTIDO ALGEBRAICO.

- Dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores en el espacio.
- Expresión de un vector como combinación lineal de otros vectores.
- Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales.
- Utilización de las matrices para representar datos estructurados y situaciones de contexto real.

- Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
- Expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial y conocer el concepto de matriz ampliada del mismo.
- Sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles.
- Teorema de Rouché-Frobenius.
- Discusión de sistemas lineales, posiblemente dependiente de un parámetro, mediante el método de Gauss o por estudio directo de rangos.
- Resolución de sistemas lineales, posiblemente dependiente de un parámetro, mediante el método de Gauss o empleando la regla de Cramer.
- Resolución de ecuaciones matriciales mediante el uso de la matriz inversa y mediante su transformación en un sistema de ecuaciones lineales.
- Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.

E. SENTIDO ESTOCÁSTICO.

- Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia entre sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia.
- Operaciones con sucesos. Leyes de De Morgan.
- Planteamiento y resolución de problemas que requieran del manejo de los axiomas de la probabilidad de Kolmogorov o del trazado de diagramas de Venn.
- Planteamiento y resolución de problemas de contexto real que requieran del empleo de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes o del trazado de diagramas de árbol.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.
- Resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Variables aleatorias discretas y continuas.
- Parámetros de la distribución.
- Distribución binomial: definición, parámetros y cálculo de probabilidades en casos en que los números combinatorios implicados sean sencillos.
- Distribución normal: definición, parámetros y cálculo de probabilidades usando la tabla de la distribución normal estándar.
- Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal.
- Aproximación de la binomial a la normal. Correcciones de Yates.
- Resolución de problemas de probabilidad en situaciones de contexto real.

F. SENTIDO SOCIOAFECTIVO.

- Destrezas para evaluar diferentes opciones y tomar decisiones en la resolución de problemas y tareas matemáticas.

NOTACIÓN.

- AB denota, en el caso de matrices, el producto de A por B.
- A^t denota la traspuesta de la matriz A.

- A^{-1} denota la inversa de la matriz regular A.
- I_n denota la matriz identidad de orden n.
- $|A|$ o $\det(A)$ denota el determinante de la matriz cuadrada A.
- O_n denota la matriz nula de orden n.
- $\ln(x)$ denota el logaritmo neperiano de x.
- $\log(x)$ denota el logaritmo decimal de x.
- $\arctan(x)$ o $\operatorname{arc\,tg}(x)$ denota la arcotangente de x.
- Los términos “extremos”, o “máximos y mínimos” así como “local” o “relativo” podrán usarse indistintamente.
- $\overline{X}$ o X^c denota el conjunto complementario del conjunto X.
- Para dos conjuntos X e Y, $X \setminus Y$ o $X - Y$ representa el conjunto $X \cap Y^c$.
- En Probabilidad, $p(X/Y)$ o $p(X \mid Y)$ representa la probabilidad del suceso X condicionada al suceso Y.
- Se utilizarán cuatro cifras decimales en los problemas de Estadística y Probabilidad.

2^o. Estructura de la prueba que se planteará para la asignatura.

- Cada estudiante recibirá un único examen con 6 ejercicios distribuidos en dos partes: una parte obligatoria con 2 ejercicios, y una parte optativa dividida en 2 bloques con 2 ejercicios cada uno.

- Deberá resolver los 2 ejercicios de la parte obligatoria, y resolver solamente un ejercicio de cada uno de los 2 bloques con optatividad, con lo que cada estudiante deberá responder a 4 ejercicios.

- En caso de responder a 2 ejercicios de un mismo bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

- La parte obligatoria constará de un primer ejercicio de Análisis de carácter competencial-contextualizado y un segundo ejercicio de una de las 3 unidades de contenidos (Análisis, Álgebra o Geometría).

- El primer bloque con optatividad contendrá 2 ejercicios de una misma unidad de contenidos (Análisis, Álgebra o Geometría) distinta de la propuesta en la segunda pregunta obligatoria.

- El segundo bloque con optatividad contendrá 1 ejercicio de Estadística y Probabilidad, y 1 ejercicio de una unidad de contenidos (Análisis, Álgebra o Geometría) distinta de las propuestas tanto en la segunda pregunta obligatoria como en el primer bloque con optatividad

- Esta obligatoriedad y optatividad se contempla de forma transitoria durante el curso 2025-2026. Se considera que es la mejor forma de introducir los ejercicios de carácter competencial-contextualizados y los ejercicios con saberes relacionados con el sentido estocástico.

- En cualquier ejercicio del examen se podrá plantear alguna cuestión de carácter conceptual.

- Cada ejercicio se valorará con una puntuación máxima de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar el reconocimiento y empleo correcto del lenguaje matemático; el manejo de diferentes estrategias y herramientas de resolución de problemas, seleccionando las más adecuadas, y el uso de destrezas para la toma de decisiones y evaluación de distintas opciones en la resolución de problemas y tareas matemáticas.

- En los ejercicios de la prueba no se pedirán demostraciones de teoremas y ningún ejercicio del examen tendrá carácter exclusivamente teórico.

3^o. Instrucciones sobre el desarrollo de la prueba. Materiales permitidos en la prueba.

- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, <u>todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.</u>

- Durante el examen no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

- Se proporcionará la tabla de la distribución Normal.

- Se permitirá el uso de regla.

4^o. Criterios generales de corrección.

- Los ejercicios deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión necesarios; usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto; utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes; valorándose el grado de cumplimiento con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa del ejercicio.
- En los ejercicios en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
- Los errores cometidos en un apartado, por ejemplo, en el cálculo del valor de un cierto parámetro, no se tendrán en cuenta en la calificación de los desarrollos posteriores que puedan verse afectados, siempre que resulten de una complejidad equivalente.
- Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio.
- En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Según lo establecido en el artículo 13 del Real Decreto 534/2024, concretado en los acuerdos alcanzados por la CRUE el 27 de septiembre 2024, el criterio de valoración relativo a la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical, léxica y ortográfica de los textos producidos, así como su presentación, se tendrán en cuenta para aquellos ejercicios o tareas que requieran de la composición de un texto prolijo.

En ese caso, y salvo para alumnado diagnosticado con dislexia y/o disortografía u otra discapacidad que afecte al desarrollo del lenguaje, siempre y cuando se haya disfrutado de esta adaptación durante toda la etapa educativa inmediatamente anterior al acceso a la universidad, se tendrá en cuenta, además de la adecuación a lo solicitado en el enunciado:

a. La corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación).

b. La coherencia, la cohesión, la corrección gramatical, la corrección léxica y la presentación.

Las penalizaciones por errores se aplicarán atendiendo a los siguientes criterios:

- El corrector marcará los errores en todos los ejercicios realizados y especificará claramente la deducción efectuada en la nota global en relación con los dos criterios anteriores, recordando que la penalización nunca podrá ser superior a un punto.
- La máxima deducción global en el ejercicio será un punto de la forma siguiente:
  - Los dos primeros errores ortográficos no se penalizarán.
  - Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola.
  - A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.
  - Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.
  - Obsérvese que en aquellos casos en los que la suma de las deducciones anteriores sea superior a un punto, esta será la máxima deducción permitida: un punto.

5^o. Información adicional.

- Estas orientaciones y los exámenes de los últimos años están disponibles en el punto de acceso electrónico: `https://www.juntadeandalucia.es/economiaconocimientoempresasyuniversidad/sguit/?q=grados&d=g_b_examenes_anteriores.php`

6^o. Modelo de prueba.

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2025–2026

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de seis ejercicios distribuidos en una parte con dos ejercicios obligatorios y una parte con dos bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Deberá resolver los dos ejercicios obligatorios y solamente un ejercicio de cada uno de los dos bloques con optatividad. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque optativo, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

e) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos. En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de regla.

PARTE OBLIGATORIA. Resuelve los dos ejercicios siguientes:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

La contaminación por dióxido de nitrógeno, $\mathrm{NO_2}$, en cierta estación de medición de una ciudad, durante el pasado mes de abril, se puede modelar por la función:

$$c(t) = 80 - 6t + \frac{23t^2}{20} - \frac{t^3}{30},$$

medido en mg/m^3, donde $t \in [0, 30]$ representa el tiempo, expresado en días, transcurrido desde las 0 horas del día 1 de abril.

a) **[0,5 puntos]** ¿Qué nivel de $\mathrm{NO_2}$ había a las 12 horas del día 10 de abril?

b) **[1,25 puntos]** ¿En qué momento se alcanzó el máximo nivel de $\mathrm{NO_2}$?, ¿cuál fue ese nivel máximo?

c) **[0,75 puntos]** Calcula, mediante $\frac{1}{30}\int_0^{30} c(t)\, dt$, el nivel promedio del mes.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-k}{2}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) **[1 punto]** Para $k = 0$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

PARTE OPTATIVA.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3.1 (2,5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina a y b para que $A^2 = 4I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) **[1 punto]** Para $a = -1$ y $b = 1$, calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2X = B^t$.

EJERCICIO 3.2 (2,5 puntos)

Considera el sistema $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) **[1,75 puntos]** Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 2$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4.1 (2,5 puntos)

Considera la función $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1 + \cos(x)}}$.

a) **[2 puntos]** Calcula $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,dx$.

b) **[0,5 puntos]** Estudia la simetría de la función f y deduce de ella el valor de $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx$.

EJERCICIO 4.2 (2,5 puntos)

El peso de las manzanas producidas en una granja sigue una distribución normal de media 200 gramos y desviación típica desconocida.

a) **[1,25 puntos]** Si el $33\,\%$ de las manzanas pesan más de 230 gramos, calcula la desviación típica del peso de las manzanas.

b) **[1,25 puntos]** Si la desviación típica es de 50 gramos, calcula el porcentaje de manzanas que pesan entre 160 y 220 gramos.

7^o. Criterios específicos del modelo de prueba.

La evaluación se realizará según el desglose de las puntuaciones que se hace a continuación. Si algún apartado no se menciona específicamente, su puntuación es la que figura en el enunciado del ejercicio correspondiente. Cuando se dice: “x puntos por A”, hay que interpretar que se deben conceder x puntos si lo que se dice en la frase A está hecho o estudiado correctamente, incluyendo la justificación oportuna. Cuando se dice “planteamiento” se refiere al proceso seguido por el/la estudiante que, de no cometer errores, le llevará a la solución.

EJERCICIO 1. a) **[0,5 puntos]** Hasta 0,25 puntos por determinar que $t = 9,5$. b) **[1,25 puntos]** Hasta 0,5 puntos por el planteamiento. c) **[0,75 puntos]** Hasta 0,25 puntos por una primitiva de $c(t)$.
EJERCICIO 2. a) **[1,5 puntos]** Hasta 0,75 puntos por el planteamiento. b) **[1 punto]** Hasta 0,5 puntos por el planteamiento.
EJERCICIO 3.1 a) **[1,5 puntos]** Hasta 0,25 puntos por cada una de las cuatro ecuaciones. b) **[1 punto]** Hasta 0,5 puntos por resolver simbólicamente X.
EJERCICIO 3.2 a) **[1,75 puntos]** Hasta 0,5 puntos por calcular el determinante de la matriz de coeficientes. Hasta 0,75 puntos por hallar los valores críticos. b) **[0,75 puntos]** Lo indicado en el enunciado.
EJERCICIO 4.1 a) **[2 puntos]** Hasta 0,5 puntos por aplicar la regla de Barrow. b) **[0,5 puntos]** Hasta 0,25 puntos por estudiar la simetría de f.
EJERCICIO 4.2 a) **[1,25 puntos]** Hasta 0,5 puntos por el planteamiento y tipificar. b) **[1,25 puntos]** Hasta 0,5 puntos por el planteamiento y tipificar.

8^o. Anexo. Ejemplos de ejercicios de Análisis de carácter competencial-contextualizado.

En este anexo se muestra una serie de ejercicios elaborados por la ponencia de Matemáticas II que pueden servir como referencia para problemas que pueden incluirse en las pruebas.

EJERCICIO 1.

[2,5 puntos] Un joven se sitúa en el punto A en una orilla de un río de 20 metros de ancho. Sea B el punto de la orilla opuesta justo enfrente de A. El joven desea llegar a un punto C situado a 100 metros de B, en la orilla opuesta de A. Para ello, puede cruzar a nado desde A hasta un cierto punto D situado entre B y C a una velocidad de 1 m/s. Luego, puede continuar a pie de D a C a una velocidad de 2 m/s. ¿A qué distancia debe estar el punto D de B para que el joven llegue de A a C en el menor tiempo posible?

EJERCICIO 2.

[2,5 puntos] Se quiere introducir una zona verde de césped en un parque urbano para hacerlo más agradable. La zona con cesped está delimitada por las gráficas de las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = 9x - x^2$ y $g(x) = x$, donde x representa la longitud en metros. Si el césped para plantar en esa zona tiene un precio de 12 euros por metro cuadrado, ¿cuál será el coste total del césped para toda la zona verde?

EJERCICIO 3.

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = te^{-t/2}$ miligramos por mililitro.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor máximo de $c(t)$ e indica en qué momento se alcanza dicho valor máximo.

b) **[1 punto]** Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, ¿en algún momento hay riesgo para el paciente?

EJERCICIO 4.

[2,5 puntos] Un agricultor quiere dividir su parcela en dos partes para cultivar productos distintos. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = 3x^2$ y la recta $y = 12$. Si decide dividir dicha parcela en dos partes iguales mediante la recta $y = a$, halla el valor de a.

EJERCICIO 5.

[2,5 puntos] Dos primos de 32 y 5 años, respectivamente, heredan de sus abuelos una finca delimitada por las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y $g(x) = 9x/4 + 9/2$. La finca tiene dos regiones, la región de la izquierda será para el primo de menor edad, mientras que la región de la derecha será para el primo mayor. Calcula la superficie de finca que corresponde a cada primo, y razona si es proporcional a sus edades.

EJERCICIO 6.

Una partícula parte de reposo y al cabo de t segundos, su velocidad viene dada por la función $v(t) = t(4 - t)$ metros/segundo (recuerda que la velocidad es la derivada del espacio respecto al tiempo).

a) **[0,75 puntos]** Esboza la gráfica de la función espacio con respecto al tiempo.

b) **[1,75 puntos]** Calcula el espacio recorrido en los tres primeros segundos.

EJERCICIO 7.

En una habitación se ha dejado una bebida caliente, su temperatura $T(t)$ en grados Celsius se puede modelar por la función $T(t) = \dfrac{90 + 20t}{t + 1}$ donde $t \geq 0$ representa el tiempo en segundos.

a) **[1,75 puntos]** En relación a la función $T(t)$, indica su dominio, intervalos de crecimiento e intervalos de concavidad, posibles extremos y posibles asíntotas. Esboza la gráfica de dicha función.

b) **[0,75 puntos]** Indica, justificando tu respuesta, cuál era la temperatura inicial que tenía la bebida, describe cómo ha evolucionado su temperatura y cuál sería la hipotética temperatura final que alcanzaría. ¿A qué temperatura está la habitación?

EJERCICIO 8.

Una población de bacterias tiene inicialmente P_0 bacterias. Sea $P(t)$ el número de bacterias al cabo de t días. Sabiendo que

$$P(t) = P_0 + \int_0^t 290e^{0,1x}\,dx,$$

y que al cabo de 10 días hay 7888 bacterias:

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuánto vale P_0, el número inicial de bacterias?

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuántas bacterias hay al cabo de 170 días?

(Nota: utiliza como aproximación del número $e \simeq 2,72$).

EJERCICIO 9.

Se han realizado varios estudios para determinar el modo en que se transmiten los bulos en cierta red social. Un primer estudio ha establecido que el número (aproximado) de personas $f(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función

$$f(t) = \frac{18}{1 + 2^{-t+3}}$$

donde t representa el tiempo (en días).

a) **[0,5 puntos]** Según este modelo, ¿cuántas personas empiezan a difundir el bulo?

b) **[0,75 puntos]** A medida que transcurre el tiempo, ¿está limitado el número de personas que conocen el bulo? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

En un segundo estudio, han simplificado el modelo anterior y han establecido que el número (aproximado) de personas $g(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función

$$g(t) = \frac{18}{\pi}\arctan(t - 3) + 9$$

donde t representa el tiempo (en días).

c) **[1,25 puntos]** Según este segundo modelo, ¿en qué momento empieza a disminuir la velocidad a la que se propaga el bulo? ¿Cuántas personas conocen en dicho momento el bulo?

EJERCICIO 10.

[2,5 puntos] Un vivero de plantas verdes suele vender cierto arbusto después de 6 años de crecimiento y cuidado. La velocidad de crecimiento durante esos 6 años es aproximadamente $h'(t) = (1,5)t+5$ cm/año (t tiempo en años), siendo $h(t)$ la altura en cm. Si cada arbusto mide 12 cm cuando se planta y el coste de producción por unidad en euros al cabo de t años es $C(t) = h(t)/10$, calcula el beneficio obtenido si a los 6 años se decide vender 500 arbustos por 15 euros cada uno.

EJERCICIO 11.

[2,5 puntos] En una cierta región, un río sigue la forma de la función $f(x) = x^3/4 - x^2 + x$ y es cortado por un camino dirigido según el eje OX. Se quieren plantar pinos en la porción de terreno comprendida entre el río y el camino. Sabiendo que la unidad de medida de longitud es el kilómetro y que la densidad de plantación es 150 pinos por hectárea, calcula el número de pinos necesarios (recuerda que una hectárea son 10000 m^2).

EJERCICIO 12.

Un cohete de investigación realiza su vuelo con una velocidad representada por la función v, medida en kilómetros por segundo. Tras un estudio se ha determinado que la derivada v' de esta función se corresponde con $v'(t) = 24 - 6\sqrt{t+1}$, donde t representa el tiempo medido en segundos transcurrido desde el lanzamiento. Por otra parte, sabemos que la velocidad inicial es de 15 km/s y que en cuanto empieza a perder velocidad el cohete no se puede controlar. En este momento, lo más conveniente es que se autodestruya y para ello utilizamos un artefacto explosivo que se activa con un temporizador.

a) **[1 punto]** Si utilizamos el temporalizador para que active la explosión, ¿cuál es el valor máximo de tiempo, en segundos, que tomaría como referencia para destruir el cohete?

b) **[1,5 puntos]** Obtén la función que determina la velocidad del cohete y la velocidad máxima que alcanza.

EJERCICIO 13.

El número de moléculas en una placa de ensayo viene dado por la función $f(x) = e^{x^2-2x}$ expresado en miles de moléculas, donde $x \in [0, 5]$ indica el tiempo en horas.

a) **[1,5 puntos]** Realiza un estudio del crecimiento de dicha función. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima? ¿En qué momento se alcanzan?

b) **[1 punto]** ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a las 3 horas? ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento en el intervalo $[0, 5]$?

9^o. Anexo. Ejemplos de ejercicios de Análisis con preguntas de carácter conceptual.

Este anexo contiene una muestra de ejercicios que pueden servir como referencia para problemas que pueden incluirse en las pruebas.

EJERCICIO 1.

Un objeto se mueve en línea recta con una velocidad (medida en metros por segundo) definida por la función $v\colon [0,8] \to \mathbb{R}$, dada por $v(t) = \dfrac{8t - t^2}{(t+1)^2}$, donde t representa el tiempo en segundos.

a) **[2 puntos]** Calcula la distancia total (en metros) que recorre el objeto durante los primeros 8 segundos, sabiendo que la distancia es la integral del valor absoluto de la función velocidad.

b) **[0,5 puntos]** Si el objeto se hubiera movido con una velocidad $w\colon [0,8] \to \mathbb{R}$, con $w(t) > v(t)$ para todo $t \in [0,8]$, razona sin calcular la integral, si el objeto hubiera recorrido una distancia mayor o menor en los 8 segundos.

EJERCICIO 2.

La suma de la longitud de una circunferencia y el perímetro de un cuadrado son 10 metros.

a) **[2 puntos]** ¿Cuáles deben ser las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima?

b) **[0,5 puntos]** ¿Es posible determinar las longitudes del radio de la circunferencia y de un lado del cuadrado para que la suma de las áreas sea máxima?

EJERCICIO 3.

El beneficio (en miles de euros) que obtiene una empresa al vender x miles de unidades de un producto viene dado por la función: $B(x) = -2x^3 + 15x^2 + 36$, donde x está en el intervalo $[0,8]$. Se pide:

a) **[2 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento del beneficio y localiza los valores de x en los que se alcanzan máximos y mínimos relativos. Calcula también el valor máximo y mínimo absolutos del beneficio en dicho intervalo.

b) **[0,5 puntos]** Justifica razonadamente qué decisión tomaría la empresa en función de los resultados y por qué en los problemas de optimización en intervalos cerrados es imprescindible comparar los extremos relativos con los valores en los extremos del intervalo.

EJERCICIO 4.

a) **[0,5 puntos]** ¿La integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{x^2}\,dx$ es positiva, negativa o cero? Justifica la respuesta sin calcular la integral.

b) **[2 puntos]** Calcula el área del recinto acotado y limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

EJERCICIO 5.

a) **[2 puntos]** Calcula los valores a, b, c, d de la función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sabiendo que la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de inflexión $(1,0)$ es $y = 3x - 3$ y que el punto de abscisa $x = 0$ es un extremo relativo.

b) **[0,5 puntos]** Halla dos funciones polinómicas: la primera que tenga un único extremo relativo y la segunda que no contenga ninguno.

EJERCICIO 6.

Sea $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2+e^x}$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpreta gráficamente el resultado.

b) **[1,25 puntos]** Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpreta gráficamente el resultado.

EJERCICIO 7.

Sea la función $f(x) = x^2e^{-x}$ definida en el intervalo $[0,3]$.

a) **[1 punto]** Sin efectuar el cálculo de la integral razona, explica y justifica por qué $0 < \displaystyle\int_0^3 x^2e^{-x}\,dx < 2$.

b) **[1,5 puntos]** Calcula el valor exacto de $\displaystyle\int_0^3 x^2e^{-x}\,dx$.

EJERCICIO 8.

[2,5 puntos] Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2+4x+3$. Encuentra los valores del parámetro a para los que la recta que pasa por el origen $y = ax$ es tangente a la gráfica de f. ¿Cuál es la abscisa de los puntos de tangencia?

EJERCICIO 9.

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\frac{x}{a}} + 2$, donde $a > 0$ es un parámetro. Responde a las siguientes cuestiones:

a) **[1,25 puntos]** Determina el valor de a para que exista una primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pase por los puntos (0,0) y $(a, e+1)$. Calcula dicha primitiva.

b) **[0,5 puntos]** Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, justifica si es posible o no que la función $G(x) = F(x) + x^2$ también lo sea.

c) **[0,75 puntos]** Calcula a para que $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = e$.

EJERCICIO 10.

Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ si $x \neq 1,-1$.

a) **[1,25 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) **[0,5 puntos]** ¿Es creciente f en el conjunto $(-1,1) \cup (1,+\infty)$? Justifica tu respuesta.
