

Derivadas



-Bloque de análisis - Matemáticas II-



Monomios y Polinomios

- La derivada de un **número cualquiera** es cero:

$$y = 2 \rightarrow y' = 0$$

$$y = 9 \rightarrow y' = 0$$

- La derivada de un monomio de **grado uno** es igual al **coeficiente** (como si elimináramos la x):

$$y = 3x \rightarrow y' = 3$$

$$y = 7x \rightarrow y' = 7$$

- La derivada de un monomio de **grado mayor a 1** se obtiene con la fórmula:

$$y = kx^n \rightarrow y' = n k x^{n-1}$$

Handwritten notes: "potencia" pointing to n, "número delante de x" pointing to k.

$$y = 2x^3 \rightarrow y' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \rightarrow y' = 6x^2$$

- La derivada de un **polinomio** es derivar cada uno de sus monomios (respetando sumas y restas):

$$\begin{aligned} y &= 2x^3 + 5x - 7 \\ \rightarrow y' &= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 5 - 0 \\ \rightarrow y' &= 6x^2 + 5 \end{aligned}$$

Radicales

Raíz cuadrada

$$y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2 \cdot \sqrt[n]{u}}$$

Handwritten notes: "derivada de lo de dentro" pointing to u', "2" pointing to the denominator.

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

Raíz con índice mayor de dos

$$y = \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u}^{n-1}}$$

Handwritten notes: "índice de la raíz" pointing to n, "derivada de lo de dentro" pointing to u'.

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 + 4)^2}}$$

Producto

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Handwritten notes: "función uno" pointing to u, "función dos" pointing to v, "derivada f.1" pointing to u', "derivada f.2" pointing to v'.

$$\begin{aligned} y &= (2x - 2) \cdot (3x^2 - 1) \\ \Rightarrow y' &= (2) \cdot (3x^2 - 1) + (2x - 2) \cdot (6x) \end{aligned}$$

División

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - (u \cdot v')}{v^2}$$

Handwritten notes: "función uno" pointing to u, "función dos" pointing to v, "derivada f.1" pointing to u', "derivada f.2" pointing to v'.

$$y = \frac{2x - 2}{3x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{2(3x^2 - 1) - [(2x - 2) \cdot 6x]}{(3x^2 - 1)^2}$$

Derivadas



-Bloque de análisis - Matemáticas II-



Potencia

$$y = u^n \longrightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

potencia
función base
derivada función base

$$y = (3x^3 - 2x)^3 \\ \Rightarrow y' = 3 \cdot (3x^3 - 2x)^2 \cdot (9x^2 - 2)$$

Exponencial

$$y = a^u \longrightarrow y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

función en el exponente
número cualquiera como base
derivada del exponente

$$y = 2^{3x^2} \Rightarrow y' = 2^{3x^2} \cdot 6x \cdot \ln 2$$



⚠️ ¡No las confundas! la diferencial es que la potencial es una función elevada a un número y la exponencial es un número elevado a una función.

💡 ¡Ojo! Aunque en los ejemplos las funciones dentro del exponente son polinómicas, pueden ser de cualquier tipo (trigonométricas, logarítmicas, etc.).

Exponencial del número e

$$y = e^u \longrightarrow y' = e^u \cdot u'$$

función en el exponente
número e como base
derivada del exponente

$$y = e^{3x^2} \Rightarrow y' = 6x \cdot e^{3x^2}$$

$$y = e^{(3x+1)^4} \Rightarrow y' = 4(3x+1)^3 \cdot 3 \cdot e^{(3x+1)^4} \\ = 12(3x+1)^3 \cdot e^{(3x+1)^4}$$



💡 ¡Fíjate bien! Es la misma fórmula que la derivada exponencial en base a. Sin embargo, $\ln e = 1$ y por eso no se tiene en cuenta en esta fórmula.

Logaritmos

Neperiano

$$y = \ln(u) \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

argumento (función)
Logaritmo neperiano

$$y = \ln(3x^3 - 2x^2) \Rightarrow y' = \frac{9x^2 - 4x}{3x^3 - 2x^2}$$

En base a

$$y = \log_a(u) \longrightarrow y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

argumento
número u base del log
derivada

$$y = \log_5(x^2 - x) \Rightarrow y' = \frac{2x - 1}{x^2 - x} \cdot \log_5 e$$

Derivadas

Trigonométricas

SENO

$$y = \text{sen}(u) \longrightarrow y' = u' \cos(u)$$

función en el ángulo *derivada del ángulo*

TANGENTE

$$y = \text{tg}(u) \longrightarrow y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

COSENO

$$y = \cos(u) \longrightarrow y' = -[u' \cdot \text{sen}(u)]$$

$$y = \sin(4x^3) \rightarrow y' = 12x^2 \cdot \cos(4x^3)$$

$$y = \cos(-x^3 - 4x^2) \rightarrow y' = -(-3x^2 - 8x) \cdot \sin(-x^3 - 4x^2) = (3x^2 + 8x) \cdot \sin(-x^3 - 4x^2)$$

$$y = \tan(\sin x) \rightarrow y' = \frac{\cos(x) \cdot 1}{\cos^2(\sin x)}$$



⚠ ¡CUIDADO! No multipliques JAMÁS la función que está dentro de un ángulo con otra función.

Inversas Trigonométricas

ARCOSENO

$$y = \arcsen(u) \longrightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

sen *función en el ángulo* *derivada del ángulo*

ARCOTANGENTE

$$y = \text{arc tg}(u) \longrightarrow y' = \frac{u'}{1+(u)^2}$$

ARCOCOSENO

$$y = \arccos(u) \longrightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

Reglas de integración

- 1 Se puede extraer e insertar en la integral todos los números reales que se desee, pero ¡nunca jamás las x!
- 2 Si introducimos un número dentro de una integral debe extraerse en operación contraria.

Integrar es lo contrario de derivar. También llamada primitiva. Se simboliza como:

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{función a integrar}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{diferencial de la variable}} = \underbrace{F(x)}_{\text{función integrada}} + \underbrace{C}_{\text{constante de integración}}$$

simbolo de la integral (pointing to the integral symbol)



⚠ ¡IMPORTANTE! En todas las integrales: Cuando escribimos la solución final se cambia dx por +C y se elimina el símbolo de integración $\int$

Monomios y Polinomios

Integral de un número real cualquiera

$$\int k \cdot dx = Kx + C$$

se añade una x (pointing to the x in Kx)

Nº real cualquiera (pointing to the k)

$$\int 2 dx = 2x + C$$

Integral de un monomio

$$\int Kx^n \cdot dx = \frac{Kx^{n+1}}{n+1} + C$$

monomio (pointing to Kx^n)

se suma uno al exponente (pointing to n+1)

se divide entre el exponente +1 (pointing to the denominator n+1)

$$\int 5x^2 dx = \frac{5x^3}{3} + C$$

Integral de un Polinomio

Al igual que con las derivadas, para integrar un **polinomio** se integra cada uno de sus monomios por separado (respetando sumas y restas):

$$\begin{aligned} \int (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) dx &= \int x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int 2x dx - \int 1 dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - x + C \end{aligned}$$

Potencia

estructura de la integral fórmula

$$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

función base potencia derivada f. base

$$\int [(2x^2 + 3x)^2 \cdot (4x + 3)] dx = \frac{(2x^2 + 3x)^3}{3} + C$$

Logaritmo LN

estructura fórmula

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln(u) + C$$

derivada función denominador

$$\int \frac{2x}{x^2} dx = \ln x^2 + C$$

¿Y si no nos dan la estructura completa?

La buscamos aplicando las reglas de integración.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2}{x^3} dx &= 5 \int \frac{x^2}{x^3} dx \\ &= \frac{5}{3} \int \frac{3x^2}{x^3} dx = \frac{5}{3} \ln x^3 + C \end{aligned}$$

⚠ Los números que están dentro de la integral y no forman parte de la derivada, los sacamos en la misma posición y operación, como el caso del 5.

⚠ Los números que introducimos dentro de la integral para obtener la derivada, salen en operación contraria, como el caso del 3.

Exponencial a

exponente función

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

número cualquiera derivada del exponente

$$\int 2^{3x} dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot 2^{3x} dx = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} + C$$

Exponencial e

exponente función

$$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$$

derivada del exponente

$$\int x e^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int 4x e^{-2x^2} dx = -\frac{e^{-2x^2}}{4} + C$$

Integrales

INMEDIATAS



Trigonométricas

SENO

$$\int \text{Sen}(u) \cdot u' \, dx = -\cos(u) + C$$

ángulo
función
derivada del ángulo
signo negativo

$$\int 3\sin(2x) \, dx = \frac{3}{2} \int \sin(2x) \cdot 2 \, dx = -\frac{3}{2} \cos(2x) + C$$

COSENO

$$\int \cos(u) \cdot u' \, dx = \sin(u) + C$$

derivada del ángulo

$$\int 2x \cos(x^2 - 3) \, dx = \sin(x^2 - 3) + C$$

TANGENTE

$$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} \, dx = \text{tg}(u) + C$$

$$\int \frac{3}{\cos^2(x)} \, dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = 3 \tan(x) + C$$

Inversas Trigonométricas

ARCOTANGENTE

$$\int \frac{u'}{1+(u)^2} \, dx = \text{arctg } u + C$$

derivada interior
función sin exponente
función al cuadrado

$$\int \frac{5}{1+9x^2} \, dx = \frac{5}{3} \int \frac{3}{1+(3x)^2} \, dx = \frac{5}{3} \text{arctg}(3x) + C$$

$$\int \frac{3x}{4+4x^4} \, dx = \frac{1}{4} \cdot 3 \int \frac{x}{1+(x^2)^2} \, dx = \frac{3}{4 \cdot 2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} \, dx = \frac{3}{8} \text{arctg}(x^2) + C$$

ARCSEN y -ARCCOS

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}} \, dx = \text{arcsen}(u) + C$$

derivada interior
función sin exponente
función al cuadrado
-arccos(u)

$$\int \frac{6x}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx = \frac{6}{4} \int \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} \, dx = \frac{3}{2} \text{arsen}(2x^2) + C$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -2 \arccos(x) + C$$