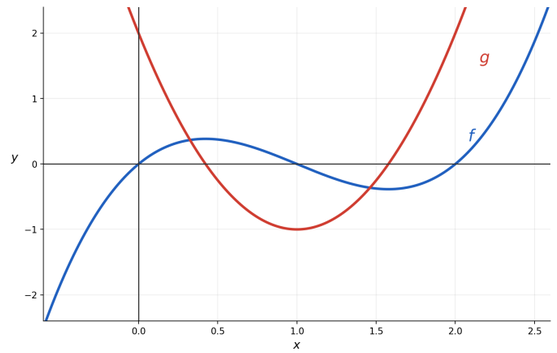
3. MODELO DE EXAMEN

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. En la figura se representan las gráficas de dos funciones polinómicas, f y g. Se sabe que una de ellas es la derivada de la otra, pero no se sabe cuál es cuál.



a) ¿Es f la derivada de g o es g la derivada de f? Justifica tu respuesta a partir de las características identificadas en las gráficas. **(1 punto)**

b) Si la función cúbica representada tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax$, ¿cuál debería ser el valor de a para ser compatible con la información que proporciona la gráfica? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

c) Un estudiante afirma que el área limitada por la gráfica de f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 2$ se obtiene directamente como $F(2) - F(0)$, F a una primitiva de f. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta y calcula dicha área. **(1 punto)**

Pregunta 1. Opción B. Algunos productos de higiene personal incorporan agentes desinfectantes que eliminan bacterias. En un cultivo con una población inicial de 5 000 bacterias se aplica uno de estos agentes. La tasa instantánea de eliminación, expresada en bacterias por segundo, viene dada por la función

$$f(t) = 3t^2 + 20t\,,$$

donde t es el tiempo transcurrido, en segundos, desde la aplicación del desinfectante.

a) ¿Cuántas bacterias se eliminan entre $t = 5$ s y $t = 12$ s? Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

b) ¿La función f es creciente durante los primeros 20 segundos? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

c) ¿Son suficientes 20 segundos para eliminar todas las bacterias del cultivo? Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

Pregunta 2. Opción A. Una antigua leyenda india cuenta que el inventor del ajedrez pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior. El tablero de ajedrez es cuadrado, tiene 8 filas y 8 columnas, es decir, 64 casillas, numeradas como se muestra en la imagen.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	⋯	
					⋯	63	64

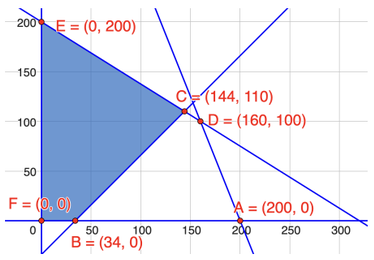
a) ¿Cuántos granos de trigo corresponden a la casilla número 30? Explica cómo has obtenido el resultado. De manera razonada, expresa mediante una fórmula el número de granos que corresponden a cualquier casilla del tablero. **(2 puntos)**

b) ¿Existe alguna casilla a la que correspondan exactamente 4096 granos de trigo? En caso afirmativo, indica cuál y justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

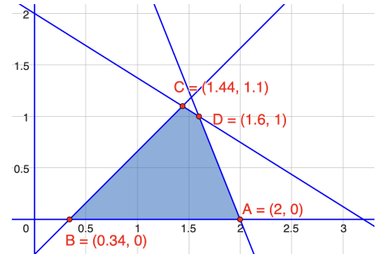
Pregunta 2. Opción B. Una pastelería elabora dos tipos de tartas, X e Y, utilizando hojaldre y crema. Cada día dispone de 160 kg de hojaldre y 100 kg de crema. Para elaborar una tarta de tipo X necesita 500 g de hojaldre y 500 g de crema, mientras que una tarta de tipo Y requiere 800 g de hojaldre y 200 g de crema. Además, cada día debe elaborar al menos 34 tartas más de tipo X que de tipo Y. Las tartas de tipo X se venden a 25 € y las de tipo Y a 20 €.

a) Explica cuál de las siguientes imágenes se corresponde con la región factible para responder a la pregunta: *¿Qué combinaciones de tartas de tipo X y de tipo Y puede elaborar la pastelería en un día?* **(1 punto)**

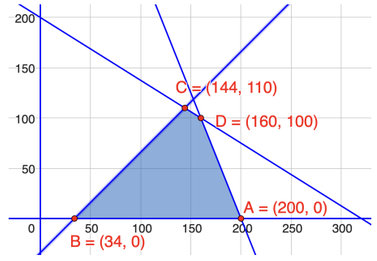
(i)



(ii)



(iii)



b) ¿Podría la pastelería elaborar 210 tartas de tipo X en un día? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

c) ¿Qué combinación de tartas permite maximizar el importe de las ventas? ¿Cuál sería ese importe? Explica si, con esa combinación, se utilizan todas las cantidades disponibles de hojaldre y crema. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción A. El siguiente sistema de ecuaciones (con x e y como incógnitas) depende de los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 4x + 6y &= 24 \\ 2x + my &= 10 \end{cases}$$

a) Para $m = 1$ y para $m = 2$ razona si el sistema tiene solución y, si la tiene, indica cuántas soluciones hay. Calcula una de ellas (para el caso que prefieras). **(1 punto)**

b) ¿Existe algún valor de m para el que el sistema no tenga solución? En caso afirmativo, indica cuál o cuáles. Explica tus respuestas. **(1 punto)**

c) Asume que $m = 3$, ¿por qué valor hay que cambiar el término independiente de la primera ecuación (que ahora vale 24) para que el sistema tenga infinitas soluciones? Explícalo **(0.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción B. Se consideran las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ \lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Qué producto AB o BA permite completar la igualdad $2C + (\quad) = D$? Justifica tu respuesta. Expresa la igualdad como un sistema de ecuaciones lineales. **(1 punto)**

b) ¿Para qué valores de λ tiene solución el sistema obtenido? Determina justificadamente cuántas soluciones tiene, en cada caso, y calcula las que existan. **(1 punto)**

c) Para $\lambda = 17$, ¿se puede eliminar la tercera ecuación sin modificar el conjunto de soluciones del sistema? ¿Qué ocurre para $\lambda = 20$ si se elimina esa ecuación? Justifica tus respuestas. **(0.5 puntos)**

Pregunta 4. Opción A. El tiempo que tarda una empresa de reparto en entregar un pedido se modela mediante una distribución normal de media 30 min y desviación típica 5 min. Una entrega es puntual si se realiza en menos de 35 min. Se puede asumir que los tiempos de entrega de los distintos pedidos son independientes entre sí.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pedido se entregue puntualmente? **(1 punto)**

b) La empresa se compromete a devolver el dinero si menos del 80 % de las entregas realizadas en un día son puntuales. Según el modelo, ¿puede asegurar que nunca tendrá que realizar devoluciones? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

c) La empresa va a realizar un control de calidad revisando cuatro entregas elegidas al azar. ¿Sería muy sorprendente que exactamente una de ellas no fuera puntual? Justifica tu respuesta a partir de la probabilidad correspondiente. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. En una región se estima que el 20 % de todos los días del año hay viento sur, el 40 % hay viento norte y el resto de días no hace viento. Además, solo el 10 % de los días con viento sur llueve. El 20 % de todos los días del año hay viento norte y llueve. Finalmente, un 25 % de los días sin viento, llueve.

a) Elegido un día del año al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya viento sur y no llueva? **(1 punto)**

b) De los días que no llueve, ¿en qué porcentaje hay viento sur? **(1 punto)**

c) Justifica si en esa región es independiente, en términos probabilísticos, que llueva y que haya viento sur **(0.5 puntos)**

Pregunta 5. Opción A. Una compañía aérea está estudiando la puntualidad de sus vuelos en los últimos años. A partir de una muestra aleatoria de 750 vuelos se obtuvo un intervalo de confianza del 95 % para la proporción poblacional de vuelos puntuales igual a (0.7714, 0.8286).

a) ¿Cuál fue la proporción de vuelos puntuales en la muestra? ¿Cuántos vuelos de los 750 fueron puntuales? **(1 punto)**

b) La compañía afirma que al menos el 75 % de sus vuelos son puntuales. Teniendo en cuenta el intervalo de confianza obtenido, ¿consideras que los resultados del estudio respaldan esta afirmación? ¿Cuánto confiarías en ella? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

c) Si, con la misma muestra del apartado anterior, se obtuvo el intervalo $(0.7623\,,\,0.8377)$ para la proporción poblacional de vuelos puntuales, ¿cuál es el nivel de confianza que se utilizó en este último intervalo? **(1 punto)**

Pregunta 5. Opción B. Se sabe que los salarios en una región siguen una distribución normal, con desviación típica de 200 €.

a) Para estimar el salario medio en esa región se proponen tres estrategias de muestreo:

(1) Encuestar a 1000 personas que respondan a un cuestionario publicado en redes sociales, en el que se pregunte su salario.
(2) Seleccionar aleatoriamente a 1000 personas de entre toda la población asalariada de esa región y preguntarles por su salario.
(3) Entrevistar a 1500 personas que trabajan en empresas de la capital de la región.

¿Cuál consideras más adecuada de las tres? Justifica tu elección. **(0.5 puntos)**

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para estimar el salario medio con un error máximo de 50 € y un nivel de confianza del 95 %? **(1 punto)**

c) Una investigadora propone reducir a la mitad el tamaño de la muestra aleatoria para disminuir los costes del estudio, manteniendo el mismo nivel de confianza. ¿Cómo afectaría esta propuesta al error de estimación? ¿Consideras adecuada la propuesta, si se desea mantener la misma precisión? Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

NOTA: Algunos valores de la función de distribución F de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1) = 0.8413$, $F(1.28) = 0.90$, $F(1.64) = 0.95$, $F(1.96) = 0.975$, $F(2) = 0.9772$, $F(2.33) = 0.99$ y $F(2.58) = 0.995$.

Distribución binomial: Si $X \sim B(n, p)$, entonces $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\qquad k = 0, 1, \ldots, n$.

Intervalos de confianza al nivel $(1-\alpha)100\,\%$ (en ambos casos, $F(z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$):

Media poblacional	**Proporción poblacional**
Normal con varianza conocida	Muestra grande ($n \geq 100$)
$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$