5.3. Modelo de examen

El alumnado tendrá que responder, a un número de preguntas determinado previamente y que figurará en el examen. En el supuesto de que el alumnado, de forma voluntaria o involuntaria, responda a un número de preguntas superior al establecido previamente, únicamente se corregirán las primeras respuestas, según el orden en que aparezcan, hasta completar el número de preguntas exigido. Las restantes preguntas contestadas no serán objeto de corrección ni calificación.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025–2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El examen consta de cinco preguntas, las tres primeras obligatorias. Las dos últimas preguntas tienen opcionalidad interna.

Cada pregunta se puntúa con 2 puntos.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Solo se permite el uso de calculadoras que aparecen en el listado publicado en la web de la Universidad de La Rioja. No se permite el préstamo de materiales (ni bolígrafos, ni típex, ni materiales auxiliares) entre el alumnado, durante el examen.

PARTE A (Contesta TODAS las preguntas de esta parte. Preguntas 1, 2 y 3.)

Pregunta 1.

[2 puntos] En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y −0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

a) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

b) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Pregunta 2.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) La suma de los perímetros de dos jardines en forma de cuadrado y de triángulo equiátero es 100 metros. Justifica si es posible determinar las medidas de los lados de los dos jardines, cuadrado y del triángulo, para que las suma de sus áreas sea máxima. [1 punto]

b) Determina el dominio, los intervalos de crecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{2x}(1 - 2x + 2x^2) - 1$. [1 punto]

Pregunta 3.

Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Determina la relación entre a y b, con $a, b \in \mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z &= a \\ -2x - y + 3z &= b \end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?. Justifica la respuesta [1 punto]

b) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, tal que $A = BB^T$, donde B^T es la traspuesta de B. Justifica si la matriz B puede ser única. [1 punto]

PARTE B (preguntas 4 y 5.)

Ejercico 4. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (4.1 o 4.2)

4.1 Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2)\tan(x),$$

con tan función tangente. Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $[0, \pi/2)$. [2 puntos]

4.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Determina el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. [1 punto]

b) Calcula $\int x^2 e^{2x}\, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obten algún a para que $\int_a^1 x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$. [1 punto]

Ejercico 5. Contesta solo a una de las siguientes preguntas (5.1 o 5.2)

5.1 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

a) Sean las rectas

$$r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{8} \quad s: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ -2x+y+nz=4 \end{cases}$$

Determina el valor de n para que las rectas sean paralelas. En este caso, calcula la ecuación del único plano que contiene a las dos rectas. [1 punto]

b) Calcula el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(-1,0,2)$ y $B(1,-2,-2)$. [1 punto]

5.2 Contesta justificadamente los siguientes apartados:

Determina los valores de a para que los planos de ecuaciones:

$$\begin{cases} \pi_1: x+y+z=a-1 \\ \pi_2: 2x+y+az=a \\ \pi_3: x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte. [0.75 puntos]

b) se corten en una recta. En este caso, determina la recta en su forma paramétrica. [0.75 puntos]

c) no se corten. [0.5 puntos]

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

5.4. Solucionario del modelo propuesto

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2025–2026
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

SOLUCIÓN

1. a) La desviación típica y la media de la distribución normal se calculan resolviendo el siguiente sistema lineal ([0.75 puntos]):

$$\begin{cases} 0.6 &= \dfrac{94-\mu}{\sigma} \\ -0.8 &= \dfrac{73-\mu}{\sigma} \end{cases}$$

de donde obtenemos $\sigma = 15$ y $\mu = 85$. [0.25 puntos].

b) Para hallar la nota, tenemos que obtener los valores $-k$ y k de tal forma que

$$0{,}6 = P\left(-k \leq Z \leq k\right).$$

Aplicando propiedades de la distribución normal, se sigue ([0.5 puntos]):

$$0{,}6 = P\left(Z \leq k\right) - \left(1 - P(Z \leq k)\right) = 2P(Z \leq k) - 1 \Leftrightarrow P(Z \leq k) = 0.8.$$

De modo que, buscando en la tabla de la distribución normal, se sigue que $k = 0.845$, [0.25 puntos]. Por tanto, la nota media está entre 72.325 y 97.675. [0.25 puntos]

2. a) Sea x la dimensión del lado del triángulo equilátero. Entonces la dimensión del lado del cuadrado, l es $l = (100 - 3x)/4$. Por tanto, la función a optimizar es,

$$A(x) = (25 - \frac{3}{4}x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

A presenta un punto crítico, $x_0 = \frac{300}{9+4\sqrt{3}}$, el cual satisface $A''(x_0) = \frac{9+4\sqrt{3}}{8} > 0$. Puesto que la función A presenta un mínimo, no es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que las suma de sus áreas sea máxima. [1 punto]

b) El dominio de la función $f(x)$ son todos los números reales, $\mathbb{R}$. Por otra parte, $f'(x) = 4x^2e^{2x}$. Por tanto, f es creciente y tiene un único punto crítico en $x = 0$. Además, $f''(x) = 8x(x+1)e^{2x}$, $x = -1$ y $x = 0$ son puntos de inflexión. [1 punto]

3. a) Si $a+b = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Tenemos tres incógnitas y dos ecuaciones, por tanto, en ningún caso el sistema puede ser compatible determinado. [1 punto]

b) Plantear el sistema:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 & = & 4 \\ ab & = & -1 \\ b^2+c^2 & = & 4 \end{cases}$$

Al resolver el sistema, vemos que la solución no es única. Por ejemplo, una solución es $a=2$, $b=-1/2$, $c=\sqrt{15}/2$. Otra es $a=2$, $b=-1/2$, $c=-\sqrt{15}/2$. [1 punto]

4.1 Restringimos el análisis al intervalo $[0,1] \subset [0,\pi/2]$, puesto que la función tan es discontinua en $x=\pi/2$.

La función $f(x)=(1-x^2)\tan x$ es contíua en el intervalo $[0,1]$ puesto que es producto de funciones contínuas. Es derivable en $(0,1)$ con derivada contínua:

$$f'(x) = -2x\tan x + (1-x^2)(1+\tan^2 x).$$

Además, $f(0)=f(1)=0$, y por el teorema de Rolle existe c con $c\in(0,1)$ de tal manera que $f'(c)=0$. Por otra parte, $f'(0)=1>0$ y $f'(1)=-2\tan 1<0$ y $f''(x)<0, \quad \forall x \in (0,1)$. Por tanto, existe un único c de tal manera que $f'(c)=0$, con c un máximo absoluto en $[0,1]\subset[0,\pi/2]$.

4.2 a) El dominio de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ son todos los números reales, $\mathbb{R}$. Por otra parte, $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Por tanto, f tiene dos puntos críticos, $x=\pm 1$. f es creciente en $(-1,1)$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. Además, $f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, luego los puntos de inflexión son $x=0$ y $x\pm\sqrt{3}$. [1 punto]

b) Integrando por partes, tenemos

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x^2-2x+1)+C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Ahora, aplicamos Barrow en el intervalo cerrado $[a,1]$ obteniendo una ecuación $f(a)=0$, donde $f(a)=e^{2a}(1-2a+2a^2)-1$. Teniendo en cuenta Bolzano, por ejemplo en $[-1,1]$: $f(-1)<0$ y $f(1)>0$, $f'(a)=4a^2e^{2a}>0$, se sigue que $a=0$. [1 punto]

5.1 a) Encontrar los vectores directores de las rectas r y s, $d_r=(4,2,8)$ y $d_s=(2n+1,2-n,5)$. Puesto que las rectas r y s tienen que ser paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales, es decir,

$$\frac{4}{2n+1}=\frac{2}{2-n}=\frac{8}{5}.$$

Se deduce de lo anterior que $n=3/4$. Calcular el plano que pasa por $P_r(3,-1,-1)$ y contiene a las rectas. Sea el vector $\overrightarrow{P_sP_r}=(4,-3,-1)$, luego el plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+1 \\ 4 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(11x+18y-10z-25)=0.$$

De modo que, la ecuación del plano pedido es: $11x+18y-10z-25=0$. [1 punto].

b) Ver que el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los puntos $A(-1,0,2)$ y $B(1,-2,-2)$, es el plano perpendicular al segmento $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-4)$ y que pasa por el punto medio $\frac{A+B}{2} = (0,-1,0)$, esto es, $2x - 2y - 4z + D = 0$ de manera que $2 \cdot 0 - 2(-1) - 4 \cdot 0 + D = 0$. Entonces $D = -2$ y el plano es: $2x - 2y - 4z - 2 = 0$.

Otra forma, es planteando distancias y llegando a la misma ecuación:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2}.$$

[1 punto].

5.2 a) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, los tres planos se cortan en un único punto, $\left(a+1, \frac{2-a}{a-1}, \frac{-a}{a-1}\right)$. [0.75 puntos]

b) Para $a = 2$, los tres planos se cortan en una recta r que viene dada ([0.75 puntos]):

$$r \equiv \begin{cases} x &= 1 - \lambda, \\ y &= 0, \\ z &= \lambda, \end{cases}$$

c) Para $a = 1$, los tres planos no se cortan. [0.5 puntos]