ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

1 OBJETIVO 1

RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- Esta constante k se denomina **constante de proporcionalidad directa**.

EJEMPLO

Si cada kilo de manzanas vale 40 céntimos, averigua la relación que existe entre el peso de manzanas y el precio.

Para ello, formamos una tabla de dos filas: en una de ellas representamos las cantidades de una magnitud, y en la otra, las cantidades de la otra magnitud.

PESO (en kilos)	1	2	3	4	5
PRECIO (en céntimos)	40	80	120	160	200

Todas las divisiones entre el precio de las manzanas y su peso dan el mismo resultado:

$$\frac{40}{1} = 40 \qquad \frac{80}{2} = 40 \qquad \frac{120}{3} = 40 \qquad \frac{160}{4} = 40 \qquad \frac{200}{5} = 40$$

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40 = k$$

Es decir, el peso de las manzanas y su precio son magnitudes directamente proporcionales.

La constante de proporcionalidad es, en este caso, $k = 40$.

La tabla representada se denomina tabla de proporcionalidad.

1 **Para hacer una tortilla se utilizan 4 huevos. Determina la relación entre estas magnitudes.**

a) Completa la tabla.

HUEVOS	8	16	20		32
TORTILLA	2	4	5	6	

b) Comprueba el resultado de todas las divisiones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{\square}{6} = \square \qquad \frac{32}{\square} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales? $\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{\square}{6} = \frac{32}{\square} = \square$

d) Determina la constante de proporcionalidad, k.

2 **Completa las tablas siguientes para que sean tablas de proporcionalidad directa.**

2	4		8	40
6		15		

0	0,25	3		8
	1,25		12	

EJEMPLO

Considera un coche que no circula a velocidad constante, es decir, va frenando y acelerando según el tráfico, de forma que se obtengan los siguientes datos.

HORAS TRANSCURRIDAS	1	2	3	4
KILÓMETROS RECORRIDOS	3	7	15	19

Realizamos todas las divisiones entre las dos magnitudes:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad \frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Podemos observar que estas divisiones no dan el mismo resultado. Por tanto, las magnitudes de las horas transcurridas y los kilómetros recorridos no son directamente proporcionales.

3 **Por cada ventana instalada nos cobran 500 €, pero si instalamos más de 10 ventanas nos cobran 450 € por cada una. Comprueba si estas magnitudes son directamente proporcionales.**

a) Completa la tabla con los datos numéricos que faltan.

NÚMERO DE VENTANAS	2	4	7	10	11	20
PRECIO	1.000	2.000		5.000	4.950	9.000

b) Halla el resultado de las razones entre cantidades correspondientes.

$$\frac{1.000}{2} = \square \qquad \frac{2.000}{4} = \square \qquad \frac{\square}{7} = \square$$

$$\frac{5.000}{10} = \square \qquad \frac{4.950}{11} = \square \qquad \frac{9.000}{20} = \square$$

c) ¿Son magnitudes directamente proporcionales?

4 **Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) El lado de un cuadrado y su perímetro.
b) El volumen que ocupa un líquido y su peso.
c) El número de fotocopias y su precio.

5 **Observa la tabla siguiente. Comprueba que las magnitudes *M* y *M′* son directamente proporcionales, y calcula *y* e *y′*.**

MAGNITUD *M*	4	6	7	9	10
MAGNITUD *M′*	12	18	21	y	y'

1 OBJETIVO 2
APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Ya **no se puede aplicar la regla de tres tradicional**. Lo que haremos será una **regla de tres enmascarada** de la siguiente manera: Cambiamos las flechas por un igual y convertimos las columnas en fracciones.

EJEMPLO

Si una docena de naranjas cuesta 3 €, ¿cuánto cuestan 4 naranjas?

Como la cantidad de naranjas y su precio son magnitudes directamente proporcionales, podemos expresar esta relación de la siguiente manera.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \dfrac{12 \text{ naranjas}}{4 \text{ naranjas}} = \dfrac{3\text{ €}}{x\text{ €}}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{3}{x}$$

Ahora despejamos la x:

$$\frac{12}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{12x}{4} = 3 \rightarrow 12x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

Las 4 naranjas cuestan 1 €.

1 **En una panadería han pagado 42 € por 70 barras de pan. ¿Cuánto tendrían que pagar si hubiesen comprado 85 barras?**

$$\left.\begin{array}{c}\text{barras} \\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\end{array} = \begin{array}{c}\text{€} \\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Las 85 barras cuestan $\boxed{}$ €.

2 **Si 4 dólares son 3 euros, ¿cuántos euros son 4,5 dólares?**

$$\left.\begin{array}{c}\text{dólares} \\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\end{array} = \begin{array}{c}\text{euros} \\ \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Despejamos la x:

Los 4,5 dólares son $\boxed{}$ euros.

OBJETIVO 3

CALCULAR PORCENTAJES 1

Los **porcentajes** o **tantos por ciento** expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales y nos indican la cantidad de una de ellas correspondiente a 100 unidades de la otra.

NOTA: Aunque veas las soluciones con la regla de tres tradicional, recuerda hacerlo con la nueva forma (fracciones)

EJEMPLO

Si el 17 % de un terreno es 23,46 m², ¿cuántos metros cuadrados representan el total del terreno?

$$\left.\begin{array}{lrcl} \textbf{\%} & 17 & \longrightarrow & 100 \\ \textbf{m}^2 & 23{,}46 & \longrightarrow & x \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa, tenemos que: $\dfrac{17}{23{,}46} = \dfrac{100}{x}$.

Despejamos la x: $17x = 100 \cdot 23{,}46$ $\qquad x = \dfrac{2.346}{17} = 138$

Total del terreno es 138 m^2.

1 **Un depósito de 3.000 litros de capacidad contiene 1.025 litros. ¿Qué tanto por ciento es?**

$$\left.\begin{array}{lrcl} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow & x \\ \textbf{Litros} & 3.000 & \longrightarrow & 1.025 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{100}{3.000} = \dfrac{x}{1.025}$.

Despejamos la x:

Con los 1.025 litros el depósito está al .... %.

2 **En época de sequía, un embalse con capacidad máxima de 200 hectómetros cúbicos estaba al 45 %. ¿Qué capacidad de agua contenía en ese momento?**

$$\left.\begin{array}{lrcl} \textbf{Capacidad} & x & \longrightarrow & 200 \\ \textbf{\%} & 45 & \longrightarrow & 100 \end{array}\right\}$$

Como es una relación de proporcionalidad directa: $\dfrac{x}{45} = \dfrac{200}{100}$.

Despejamos la x:

La capacidad de agua es .... hectómetros cúbicos.

3 **A un artículo que vale 30 € se le aplica un 20 % de descuento. ¿Cuánto cuesta el artículo?**

$$\left.\begin{array}{lrcl} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow & 20 \\ \textbf{Euros} & 30 & \longrightarrow & x \end{array}\right\}$$

1 OBJETIVO 3
CALCULAR PORCENTAJES

SIGNIFICADO DE PORCENTAJE. TANTO POR CIENTO (%)

- Fíjate en las siguientes frases.
  «El equipo ganó este año el 85 % de los partidos».
  «El 9 % de los alumnos de la clase superan los 13 años».
- En la vida diaria se utilizan los números mediante expresiones de porcentaje.
- Expresar un determinado **tanto por ciento** (85 %, 9 %) de una cantidad (partidos, alumnos) consiste en dividir esa cantidad en 100 partes y coger, tomar, indicar, señalar… el tanto indicado.

EJEMPLO

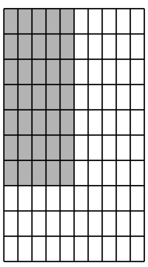
	%	Significado	Fracción	Valor	Se Lee
El equipo ganó el 85 % de los partidos	85	85 de cada 100	$\frac{85}{100}$	0,85	85 por ciento
El 9 % de los alumnos superan los 13 años	9	9 de cada 100	$\frac{9}{100}$	0,09	9 por ciento

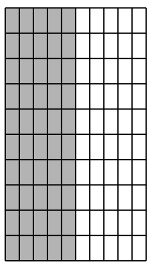
ACTIVIDADES

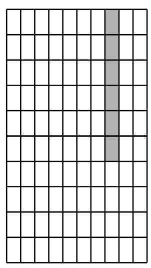
1 Completa la siguiente tabla.

%	Significado	Fracción	Valor	Se Lee
7				
			0,15	
		$\frac{38}{100}$		
	4 de cada 100			

2 Expresa la fracción y el tanto por ciento que representa la zona coloreada.

a) 

b) 

c) 

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

1 OBJETIVO 3
CALCULAR PORCENTAJES

PORCENTAJE DE UNA CANTIDAD
Recordando el concepto de fracción de una cantidad, el **tanto por ciento de una cantidad** se puede calcular de dos maneras:

1.ª Multiplicando la cantidad por el tanto por ciento y dividiendo entre 100.
2.ª Dividiendo la cantidad entre 100 y multiplicando por el tanto por ciento.

EJEMPLO

Enrique ha comprado unas zapatillas en las rebajas. Las zapatillas marcaban un precio de 60 €, pero le han realizado un descuento del 15 % ¿Cuántos euros le han rebajado del precio inicial?

$$15\,\%\text{ de }60 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{15\cdot 60}{100} = \dfrac{900}{100} = 9\text{ € le han descontado.} \\ \dfrac{60}{100}\cdot 15 = 0{,}6\cdot 15 = 9 = 9\text{ € le han descontado.} \end{cases}$$

Después de realizar el descuento al precio de las zapatillas, ¿cuánto pagó Enrique por ellas?

Una vez realizado el descuento, se resta a la cantidad que valía el artículo.

$60 - 9 = 51$ € Por tanto, Enrique pagó 51 € por las zapatillas.

3 Expresa los números en porcentajes.

a) $0{,}16 =$ c) $0{,}03 =$ e) $0{,}625 =$

b) $\dfrac{4}{5} =$ d) $\dfrac{7}{8} =$ f) $0{,}25 =$

4 Calcula el 37,5 % de 50.

5 En una población hay 1 842 personas. Si el 30 % no tienen conexión a internet, ¿cuántas personas no tienen acceso a internet?

6 El número de chicos del total de alumnos de 1.º ESO es el 80 % del número de chicas. Si hay 30 chicas, ¿cuántos chicos son?

Fíjate en el razonamiento:

Los chicos son el 80 % de las chicas, es decir, el 80 % de 30.

$$80\,\%\text{ de }30 = \frac{80}{100}\text{ de }30 = \frac{80}{100}\cdot 30 =$$

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es

Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

1 OBJETIVO 4
APLICAR LA REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

La **regla de tres simple inversa** es un procedimiento para conocer una cantidad que forma proporción con otras cantidades conocidas de dos magnitudes inversamente proporcionales.
Se debe utilizar con la nueva forma (fracciones).

EJEMPLO

Si 4 trabajadores tardan 10 días en hacer un trabajo, ¿cuánto tardarán 3 trabajadores?

$$\left.\frac{\text{Si 4 trabajadores}}{\text{3 trabajadores}} = \frac{\text{10 días}}{x\text{ días}}\right\} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{x}{10}$$

$$4 \cdot 10 = 3 \cdot x \rightarrow 40 = 3x \rightarrow x = \frac{40}{3} = 13{,}3 \text{ días}$$

Los 3 trabajadores tardarán algo más de 13 días.

1 **En un depósito hay agua para 20 personas durante 30 días. ¿Para cuánto tiempo durará el agua si fueran 22 personas?**

$$\left.\frac{\boxed{20}}{\boxed{}}\ (\text{personas}) = \frac{\boxed{30}}{\boxed{}}\ (\text{días})\right\} \rightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Despejamos la *x*:

Las 22 personas tendrán agua para $\boxed{}$ días.

2 **Con el agua de un depósito se llenan 60 envases de 5 litros cada uno. ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro (0,75 ℓ) cada una se llenarían con el agua del depósito?**

$$\left.\frac{\boxed{5}}{\boxed{}}\ (\text{litros}) = \frac{\boxed{60}}{\boxed{}}\ (\text{botellas})\right\} \rightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Despejamos la *x*:

Se llenarían $\boxed{}$ botellas de tres cuartos de litro.

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

1 OBJETIVO 5
IDENTIDADES NOTABLES

Las **identidades notables** son productos de expresiones algebraicas que se rigen por reglas fijas. Las más importantes son:

- **Cuadrado de una suma:** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- **Cuadrado de una diferencia:** $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- **Suma por diferencia:** $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

1 Calcula las potencias de estos binomios utilizando las identidades notables:

a) $(x + 1)^2 =$

b) $(2x - 1)^2 =$

c) $(3 - x)^2 =$

d) $(-2 - x^3)^2 =$

e) $(x - 4)^2 =$

2 Calcula los siguientes productos haciendo uso de las identidades notables:

a) $(x + 3) \cdot (x - 3) =$

b) $(2x + 2) \cdot (2x - 2) =$

c) $(5 - x) \cdot (5 + x) =$

d) $(-1 - x) \cdot (-1 - x) =$

e) $(3x + 1) \cdot (3x - 1) =$

3 Expresa estos polinomios como producto de monomios utilizando las identidades notables:

a) $x^2 + 2x + 1 =$

b) $x^2 - 4 =$

c) $x^2 + 4x + 4 =$

d) $x^2 - 25 =$

e) $x^2 - 6x + 9 =$

f) $x^2 - 36 =$

EJ. FINALES

1. Dos hermanas compran cinco juegos de toallas por 175 €. Una se queda con tres juegos, y la otra, con dos. ¿Cuánto debe pagar cada una?

2. Tres amigas que comparten piso reciben una factura de la compañía eléctrica por un importe de 62,40 €. Amelia llegó al piso hace 60 días; Laura, 20 días después, y Cristina solo lleva en la casa 20 días. ¿Cuánto debe pagar cada una?

3. Reparte 660 en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3.

4. Un conductor profesional ha realizado un viaje de A a B, con un vehículo pesado, a una media de 50 km/h. A continuación ha regresado conduciendo un utilitario, a 100 km/h. Y por último ha viajado otra vez a B, con una furgoneta, a 80 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en cada trayecto, si ha tardado cuatro horas y cuarto en los tres recorridos?

5.

a) 10 % de 500 b) 20 % de 400 c) 5 % de 360

d) 75 % de 280 e) 25 % de 88 f) 50 % de 250

6. Calcula.

a) 32 % de 500
b) 86 % de 60
c) 7 % de 850
d) 5 % de 347
e) 11,4 % de 4000
f) 2,5 % de 88
g) 0,4 % de 900
h) 0,01 % de 5000
i) 150 % de 398
j) 400 % de 740

7. Un agricultor, que dispone de 40 hectáreas de terreno, siembra el 65 % de cebada; el 15 %, de trigo, y el resto, de avena. ¿Cuántas hectáreas ocupa la avena?

8. Dos hermanos compran un balón que cuesta 42 €. El mayor paga el 60 %. ¿Qué porcentaje paga el pequeño? ¿Cuánto ha de pagar?

9. Un trabajador tiene un salario bruto de 1 400 € al mes, del que le retienen un 15 % de impuestos. ¿Cuánto le retienen? ¿Qué porcentaje del salario bruto se lleva? ¿Cuál es el salario neto?

10. Un ayuntamiento de cierta ciudad sacó a concurso 150 plazas de funcionarios municipales. Se presentaron 2 840 aspirantes de los que un 95 % fue eliminado durante la selección. ¿Se cubrieron todas las plazas?

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
Gran vía Fernando el Católico 23
46008 Valencia

11. Calcula la cantidad correspondiente al porcentaje indicado:

a) El 50 % de … es 32.
b) El 25 % de … es 12.
c) El 75 % de … es 15.
d) El 20 % de … es 50
e) El 10 % de … es 21.
f) El 5 % de … es 12.
g) El 30 % de … es 45

12. Calcula el porcentaje correspondiente a la cantidad indicada:

a) 5 es el … % de 20
b) 8 es el … % de 80
c) 9 es el … % de 12
d) 6 es el … % de 18.
e) 4 es el … % de 80
f) 6 es el … % de 40.
g) 9 es el … % de 150.

13. Calcula la cantidad (llamada T) correspondiente al porcentaje indicado:

a) 16 % de T = 52
b) 24 % de T = 156
c) 18 % de T = 58,5
d) 8 % de T = 10,8
e) 0,8 % de T = 5,8
f) 0,25 % de T = 3

14. Calcula el porcentaje (llamado P) de cada cantidad:

a) P % de 380 = 57
b) P % de 225 = 9
c) P % de 190 = 51,3
d) P % de 46 = 2,88
e) P % de 2 500 = 5
f) P % de 1 800 = 27

15. Hoy había en el estadio de fútbol 24000 aficionados, lo que supone un 80 % de su capacidad total. ¿Cuántos aficionados hay en el campo cuando se llena?

16. Elena tenía en su cuenta 5 000 € y ha adquirido un televisor por 750 €. ¿Qué porcentaje de sus ahorros ha gastado?

17. En mi clase somos 16 chicas, lo que supone un 53,3% del total de alumnos y alumnas. ¿Cuál es el porcentaje de chicos? ¿Cuántos somos en total?

18. Compré un ordenador portátil por 490 € y una pantalla supletoria por 135 €. ¿Qué porcentaje del gasto efectuado supone el ordenador? ¿Y la pantalla?

19. Bernardo ha comprado una bicicleta. Sus padres le han subvencionado el 50 %, y su abuela, el 30 %. Alejandro ha puesto el resto que son 108 euros. ¿Cuál era el precio de la bicicleta?

20. En una tienda de informática han subido todos los productos un 7 %. Un ordenador valía 840 €, y una impresora multifunción, 80 €. ¿Cuánto valen ahora?

21. Para comprar un piso de 180000 €, se ha de pagar, además, un 8 % de IVA y 5400 € de gastos de notaría y gestión. ¿Cuál es el gasto total?

22. Un especulador compra 6000 m^2 de terreno a 80 €/m^2. Un año después, vende 2000 m2 un 20 % más caro, y el resto, por un 25 % más de lo que le costó. ¿Cuál ha sido su ganancia?

23. De 1232 hombres encuestados, 924 declaran que colaboran en las tareas del hogar. ¿Qué porcentaje de hombres dice trabajar en casa?

24. En un examen de Matemáticas han aprobado 22 estudiantes, lo que supone el 88 % del total de la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

25. En la sesión de tarde de un teatro se han ocupado hoy 693 butacas, lo que supone el 77 % del total. ¿Cuál es el aforo del teatro?

26. En una tienda se anuncian rebajas del 35 %.

a) ¿En cuánto se queda un jersey de 60 €?

b) ¿Cuánto costaba, sin rebaja, una camisa que se queda en 39 €?

27. Paula ha pagado 76,50 € por un vestido que costaba 85 €. ¿Qué tanto por ciento le han rebajado?

28. A Irene le han subido el sueldo un 5% y ahora gana 2205 €. ¿Cuánto ganaba antes de la subida?

29. En las rebajas pagamos 344,40 € por un anorak rebajado un 18%. ¿Cuál era el precio sin rebaja?

30. Una empresa automovilística ha exportado, durante este trimestre, 6210 coches, frente a los 5 400 del trimestre pasado. ¿En qué porcentaje ha aumentado este trimestre respecto al anterior?

31. El precio de la vivienda subió un 8 % hace dos años, un 15 % el año pasado y un 10 % este año. ¿Cuál ha sido el porcentaje total de subida?

32. Un trabajador, que tenía un sueldo de 1800 €, es ascendido a jefe de sección con un sueldo de 2200 €. ¿En qué tanto por ciento ha mejorado el sueldo?

33. Tres socios invierten en un negocio 272 000 €. El primero pone el 65 %; el segundo, el 20 %, y el tercero, el resto. Si a final de año han conseguido una rentabilidad del 8 % del capital invertido, ¿qué cantidad recibirá cada uno?

34. Un estudiante ocupa un piso de alquiler el día uno de septiembre con la idea de compartirlo con otros dos compañeros. El día 10 entra el segundo inquilino, y el día 25, el tercero. ¿Cómo deben repartir ese primer mes el recibo del alquiler, que asciende a 605 €?

35. El 34 % de los asistentes a un congreso sobre la paz son europeos; el 18 %, africanos; el 32 %, americanos, y el resto, asiáticos. Sabiendo que hay 51 europeos, ¿cuántos hay de cada uno de los demás continentes?

36. Celia ha comprado en las rebajas un jersey con un descuento del 15 % y una falda con un descuento del 20 %, y le han salido ambas prendas por el mismo precio. Si en total se ha gastado 136 €, ¿cuánto se habría gastado si las hubiera comprado antes de las rebajas?

37. Vicente ha pagado 1003 € por un televisor que estaba rebajado un 15 %. Teniendo en cuenta que le han cargado un 18 % de IVA, ¿cuál era el precio de catálogo, sin rebaja ni IVA?