

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o resta algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que solo se pueden sumar y restar términos semejantes.

### EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios:  $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$  y  $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + Q(x) = \quad \quad 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

### EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios:  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$  y  $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 3x^3 - 5x^2 \quad + 5 \\ - Q(x) = \quad \quad - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

### ACTIVIDADES

- 1 Dados los polinomios  $P(x) = x^3 - 2x + 1$  y  $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ , halla  $P(x) + Q(x)$  y  $P(x) - Q(x)$ , resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

### ACTIVIDADES

**2** Calcula la suma y resta de estos polinomios.

a)  $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$

$$P(x) =$$

$$+ Q(x) =$$

---


$$P(x) + Q(x) =$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$$P(x) =$$

$$- Q(x) =$$

---


$$P(x) - Q(x) =$$

b)  $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$

$$P(x) =$$

$$+ Q(x) =$$

---


$$P(x) + Q(x) =$$

$Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$$P(x) =$$

$$- Q(x) =$$

---


$$P(x) - Q(x) =$$

c)  $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$

$$P(x) =$$

$$+ Q(x) =$$

---


$$P(x) + Q(x) =$$

$Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$$P(x) =$$

$$- Q(x) =$$

---


$$P(x) - Q(x) =$$

d)  $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$

$$P(x) =$$

$$+ Q(x) =$$

---


$$P(x) + Q(x) =$$

$Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$$P(x) =$$

$$- Q(x) =$$

---


$$P(x) - Q(x) =$$

e)  $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$

$$P(x) =$$

$$+ Q(x) =$$

---


$$P(x) + Q(x) =$$

$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$$P(x) =$$

$$- Q(x) =$$

---


$$P(x) - Q(x) =$$

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

### EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios:  $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$  y  $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) = \leftarrow \text{Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.} \\
 &= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3} \\
 &= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 \\
 &= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21 \leftarrow \text{Solo se suman términos semejantes.}
 \end{aligned}$$

$$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

### ACTIVIDADES

1 Multiplica los siguientes polinomios.

a)  $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$  y  $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1) \\
 &= \boxed{\phantom{0000}} - \boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} = \boxed{\phantom{0000}} - \boxed{\phantom{0000}} + \boxed{\phantom{0000}} = \\
 &= \phantom{0000} \leftarrow \text{Multiplica los monomios.} \\
 & \phantom{0000} \leftarrow \text{Suma los términos.}
 \end{aligned}$$

b)  $P(x) = x^3 - 1$  y  $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

$$P(x) \cdot Q(x) =$$

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

### EJEMPLO

**Multiplica los siguientes polinomios:  $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$  y  $Q(x) = x^2 + 3$**

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} \\
 \times Q(x) = \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} \\
 \hline
 + \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} \\
 \phantom{7x^3 + 2x^2 + x - 7} \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
 \end{array}$$

$21x^3 + 6x^2 + 3x - 21$  ← Producto de 3 por  $7x^3, 2x^2, x, 7$ .  
 $7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2$  ← Producto de  $x^2$  por  $7x^3, 2x^2, x, 7$ .  
 $P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$  ← Suma de monomios semejantes.

**2** Multiplica los siguientes polinomios:  $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$  y  $Q(x) = 3x + 2$

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \phantom{5x^2 - 3x + 4} \\
 \times Q(x) = \phantom{5x^2 - 3x + 4} \\
 \hline
 + \phantom{5x^2 - 3x + 4} \\
 \phantom{5x^2 - 3x + 4} \\
 \hline
 P(x) \cdot Q(x) =
 \end{array}$$

← Producto de 2 por  $5x^2, 3x, 4$ .  
 ← Producto de  $3x$  por  $5x^2, 3x, 4$ .  
 ← Suma de monomios semejantes.

**3** Calcula el producto de los polinomios  $R(x) = x^3 - 1$  y  $S(x) = x + 3$ , utilizando la propiedad distributiva.

**4** Halla el producto de los siguientes polinomios.

a)  $R(x) = x^3 - 1$  y  $S(x) = x$

b)  $R(x) = x^4 - x + 1$  y  $S(x) = x^2 + 1$

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

- Para dividir dos polinomios,  $P(x)$  y  $Q(x)$ , hay que tener en cuenta que el grado del polinomio  $P(x)$  debe ser mayor o igual que el grado del polinomio  $Q(x)$ .

$P(x)$  es el polinomio **dividendo**.

$Q(x)$  es el polinomio **divisor**.

$C(x)$  es el polinomio **cociente**.

$R(x)$  es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si  $R(x) = 0$ :

La **división** es **exacta**.

El polinomio  $P(x)$  es **divisible** (o múltiplo) por  $Q(x)$ .

### EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios:  $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$  y  $Q(x) = x^2 + 5$

$$\begin{array}{r} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 \\ \hline x^2 + 5 \\ \hline \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por  $x^2$  nos dé  $5x^3$ :

$$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3. \text{ En este caso, } \bigcirc = 5x.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ -5x^3 \phantom{+ 3x^2} \\ \hline -25x \phantom{+ 3x^2} - 7 \\ \hline 3x^2 - 20x - 7 \end{array}$$

Multiplicamos  $5x$  por cada uno de los términos del polinomio cociente ( $x^2, 5$ ), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por  $x^2$  nos dé  $3x^2$ , en este caso  $3$ .

$$\begin{array}{r} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 \\ -5x^3 \phantom{+ 3x^2} \\ \hline -25x \phantom{+ 3x^2} - 7 \\ \hline \cancel{3x^2} - 20x - 7 \\ -3x^2 \phantom{- 20x} - 15 \\ \hline -20x - 22 \end{array}$$

Multiplicamos  $3$  por cada uno de los términos del polinomio cociente ( $x^2, 5$ ), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por  $x^2$  nos dé  $20x$ , pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo:  $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor:  $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente:  $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto:  $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

# 8

## POLINOMIOS Y OPERACIONES POLINÓMICAS

### ACTIVIDADES

**1** Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.

a)  $P(x) = x - 1, Q(x) = x$

c)  $P(x) = x^2 - 1, Q(x) = x + 1$

b)  $P(x) = x^2 - 5x + 6, Q(x) = x - 2$

d)  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, Q(x) = x$

**2** Efectúa estas divisiones:

a)  $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x$

c)  $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x^2 - 2$

b)  $P(x) = x^3 - 1, Q(x) = x + 1$

d)  $P(x) = x^3 + 1, Q(x) = x^3$

# 8

## IDENTIDADES NOTABLES

### CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \overbrace{ab + ab}^{2ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

### EJEMPLO

$$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4x + y)^2 = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$$

### ACTIVIDADES

1 Desarrolla las siguientes igualdades.

a)  $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b)  $(3x^3 + 3)^2 =$

c)  $(2x + 3y)^2 =$

### CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \overbrace{ab - ab}^{-2ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### EJEMPLO

$$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(x^2 - 2)^2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$$

2 Desarrolla las igualdades.

a)  $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b)  $(5x^4 - 2)^2 =$

c)  $(4x^3 - a^2)^2 =$

# 8

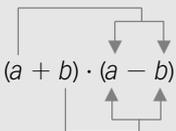
## IDENTIDADES NOTABLES

### PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:



$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab + b^2 = a^2 - b^2$$

### EJEMPLO

$$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$$

$$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$$

### ACTIVIDADES

#### 3 Desarrolla los siguientes productos.

a)  $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b)  $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c)  $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d)  $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

#### 4 Desarrolla los productos.

a)  $(x + 5)^2 =$

b)  $(2y - 7)^2 =$

c)  $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d)  $(abc + 1)^2 =$

e)  $(7 - 3x)^2 =$

f)  $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g)  $(3xy + x^3)^2 =$

#### 5 Desarrolla.

a)  $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b)  $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$