BLOQUE MATRICES

• OPERACIONES CON MATRICES

SUMA Y RESTA.

- Se suman o restan los números que se encuentren en la misma posición.

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&4\end{pmatrix}_{\underset{\text{Fila}\quad\text{columna}}{2\times3}} + \begin{pmatrix}3&-1&0\\1&0&5\end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix}2+3&1+(-1)&3+0\\0+1&1+0&4+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&0&3\\1&1&9\end{pmatrix}$$

- Solo se pueden sumar o restar matrices que tengan las mismas dimensiones, es decir, mismas filas y columnas.

PRODUCTO DE MATRICES

- El producto <u>no es conmutativo</u> → $A\cdot B \neq B\cdot A$
- Solo se pueden multiplicar matrices que tengan el mismo nº de columna en A que de fila en B.
- La matriz resultante tendrá dimensiones como la fila de A × la columna de B.

$$A_{\textcircled{3}\times\textcircled{2}} \cdot B_{\textcircled{2}\times\textcircled{3}} = S_{3\times3}$$

=

S

- La propiedad más importante del producto de matrices es:

$$\boxed{I\cdot A = A\cdot I = A}$$

$$\boxed{A\cdot A^{-1} = I}$$

I = matriz identidad.
Cuando la multiplicamos es como si fuera por 1.

- Para realizar el producto de matrices, se multiplican filas por col.:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}_{2\times2} \cdot \begin{pmatrix}1&3&1\\4&1&3\end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot4&1\cdot3+2\cdot1&1\cdot1+2\cdot3\\3\cdot1+1\cdot4&3\cdot3+1\cdot1&3\cdot1+1\cdot3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&5&7\\7&10&6\end{pmatrix}_{2\times3}$$

POTENCIAS DE MATRICES

- Solo existen potencias de matrices <u>cuadradas</u>

Ej. $A^2 = A\cdot A$ $\quad$ $A^3 = A\cdot A^2 = A\cdot A\cdot A$

• **RANGO DE MATRICES** → Nº filas o columnas linealmente independientes.

➾ MÉTODO 1. POR GAUSS

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\\1&0&5\end{pmatrix}\quad \xrightarrow{-2F_1+F_2} \quad \begin{array}{ccc}-2&0&+2\\2&1&3\\\hline 0&1&6\end{array} \quad \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&6\\1&0&5\end{pmatrix}\quad \xrightarrow{-F_1+F_2} \quad \begin{array}{ccc}-1&0&1\\1&0&5\\\hline 0&0&6\end{array}\quad \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&6\\0&0&6\end{pmatrix}$$

• Una vez hacemos Gauss (con el triángulo inferior todo en ceros) observamos cuántas filas completamente NULAS (todo ceros) nos quedan. Por cada fila TODO CERO, RESTAMOS un rango.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&6\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{array}{l}\longrightarrow \text{No se anula}\\ \longrightarrow \text{No se anula}\\ \longrightarrow \text{No se anula}\end{array} \quad = \boxed{rg(A)=3}$$

• El rango máximo será el nº de filas de una matriz, y el mínimo será 1.

➾ MÉTODO 2. POR DETERMINANTES.

Primero hacemos el determinante de la matriz completa (generalmente de 3x3) y luego vamos haciendo los más pequeños (de 2x2) hasta que nos de 0. Por cada CERO, le iremos RESTANDO un rango.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \longrightarrow |A|_{3x3}=\begin{vmatrix}1&0&1\\3&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \longrightarrow \boxed{rg(A)=3}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \longrightarrow |B|_{3x3}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0 \longrightarrow rg(B)\leq 2$$

$$\longrightarrow |B|_{2x2}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \longrightarrow \boxed{rg(B)=2}$$

si $Det_{3x3}=0 \longrightarrow rg \leq 2$

si $Det_{2x2}=0 \longrightarrow rg=1$ → ¡CUIDADO! Todos los Det_{2x2} deben de dar cero para que sea $rg=1$

si $Det_{3x3}\neq 0 \longrightarrow rg=3$

si $Det_{2x2}\neq 0 \longrightarrow rg=2$

Ej. 1 Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de m. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (Rango con parámetros)

1º Calculamos el $|A|=0$ para sacar el valor de m.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & m\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(m+1)-(2+1)=m-2\longrightarrow\boxed{m=2}$$

2º Estudiamos el rango de A cuando $m=2$ y cuando $m\neq 2$.

- Si $m\neq 2 \longrightarrow |A|_{3\times3}\neq 0 \longrightarrow \boxed{rg(A)=3}$
- Si $m=2 \longrightarrow |A|_{3\times3}=0 \longrightarrow rg(A)\leq 2$

$$|A|_{2\times2}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\longrightarrow\boxed{rg(A)=2}$$

- **INVERSA DE UNA MATRIZ**

- La inversa de una matriz existe sólo cuando su determinantes es distinto de cero $\longrightarrow \exists A^{-1}\longleftrightarrow |A|\neq 0$

⇒ MÉTODO 1. GAUSS – JORDAN

- Se realiza el método de Gauss añadiendo la matriz identidad.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow$ Calcula A^{-1}

→ Primero debemos comprobar que existe inversa

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0\longrightarrow \text{Si } \exists A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\overbrace{1 \quad \textcircled{2}}^{A} & & \overbrace{1 \quad 0}^{I} & \\ \textcircled{1} \quad 3 & & 0 \quad 1 & \end{array}\right)\xrightarrow{-F_1+F_2}\begin{array}{cc:cc}-1 & -2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\\ \hline 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \textcircled{2} & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_2+F_1}\begin{array}{cc:cc}0 & -2 & 2 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ \hline 1 & 0 & 3 & -2\end{array}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}\overbrace{1 \quad 0}^{I} & & \overbrace{3 \quad -2}^{A^{-1}} & \\ 0 \quad 1 & & -1 \quad 1 & \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$$

→ Al final debe quedar la matriz identidad a la izquierda y la matriz inversa a la derecha.

⇨ MÉTODO 2. ADJUNTAS

$$\boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{|A|}}$$

- $\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$
- $Adj(A)^t$ = matriz traspuesta (se cambian filas por col.)

Se tapa la fila y la columna adjuntas al término. Los números que quedan son la adjunta de ese término en esa posición. Se debe realizar esta operación para todos los términos (posiciones) de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 2_{11} & 0_{12} & 1_{13} \\ 3_{21} & 0_{22} & 0_{23} \\ 5_{31} & 1_{32} & 1_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{11} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_{12} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_{13} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}_{21} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_{22} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}_{23} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}_{31} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}_{32} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\boxed{A^{-1}} = \frac{Adj(A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

- **ECUACIONES MATRICIALES.**

- Todas las letras de la ecuación deben ir en mayúscula porque hacen referencia a matrices. Si aparece alguna minúscula será un parámetro.
- La incógnita que debemos calcular será siempre una matriz.
- Se despeja como una ecuación normal
- ¡CUIDADO! Al despejar deben quedarse todas las incógnitas en la misma posición que al inicio. RECUERDA que las matrices no son conmutativas.

Ej. 1 → $X \cdot \overset{\text{dcha de X}}{A} + B = C \longrightarrow X \cdot A = C - B \longrightarrow X = \frac{C-B}{A} \longrightarrow X = (C-B) \cdot \overset{\text{dcha}}{A^{-1}}$

Ej. 2 → $\underset{\text{izq}}{A} \cdot X \cdot \underset{\text{dcha}}{B} = C \longrightarrow X = \frac{C}{A \cdot B} \longrightarrow X = \underset{\text{izq}}{A^{-1}} \cdot C \cdot \underset{\text{dcha}}{B^{-1}}$

• SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+z=1\\ -x+y-2z=1\\ 2x+2y+z=3\end{array}\right\} \Longrightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} x & y & z & \text{términos indep.}\\ 1&3&1&1\\ -1&1&-2&1\\ 2&2&1&3\\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A}} & \end{array}\right)$$

⇒ A = matriz con x, y, z

A* = matriz con x, y, z y términos indep.

TEOREMA ROUCHÉ-FROBENIUS

DISCUSIÓN DE SISTEMAS

Si $rg(A) = rg(A^*) = N°$ incógnitas → S.C.D (1 solución)

Si $rg(A) = rg(A^*) \neq N°$ incog. → SCI (∞ sol.)

Si $rg(A) \neq rg(A^*)$ → S.I (No tiene sol.)

TRUCOS

1.) En un SCI (∞ sol.) siempre se cumple: $\boxed{N° \text{parámetros} = N° \text{incóg.} - Rg}$

2.) El rg(A*) SIEMPRE será igual o uno más que el rg(A)

Ej. 1 Discute el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=1\\ x+y-z=3\\ 3x+y-2z=8\end{array}\right\} \longrightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{A}} & \\ 1&-2&1&1\\ 1&1&-1&3\\ 3&1&-2&8\end{array}\right) \longrightarrow rg(A)=rg(A^*)=N° \text{incóg.} \Downarrow \underline{\underline{SCD}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \underline{rg(A)=3}$$

No es necesario calcular el rg(A*) ya que siempre será igual o uno mayor que el rg(A) (No puede ser de 4 en este caso). → rg(A*) = 3

• RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

MÉTODO 1. GAUSS

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=16\\ x+3y=-3\end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -5 & 16\\ 1 & 3 & -3\end{array}\right) \quad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\underline{F_1+F_2(-2)}}\\ 2 & -5 & 16\\ -2 & -6 & 6\\ \hline 0 & -11 & 22\end{array} \quad \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -5 & 16\\ 0 & -11 & 22\end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-5y=16\\ -11y=22\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -11y=22 \rightarrow \boxed{y=\frac{22}{-11}=-2}\\ 2x-5(-2)=16 \longrightarrow \boxed{x=3}\end{array}\right.$$

SOLUCIÓN

$x=3$

$y=-2$

⇒ MÉTODO 2. CRAMER

· Se utiliza generalmente en SCD. El determinante de la matriz debe ser distinto de cero → $\boxed{|A| \neq 0}$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{A}} & \text{N°ind.} \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{4} \quad \text{Rg}(A) = 3 \ \underline{\text{SCD}}$$

$$X = \frac{\begin{array}{|ccc|} \text{N°ind.} & y & z \\ 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{array}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \ ; \quad Y = \frac{\begin{array}{|ccc|} x & \text{N°ind.} & z \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2 \ ; \quad Z = \frac{\begin{array}{|ccc|} x & y & \text{N°ind.} \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}}{|A|} = \frac{12}{4} = 3$$

$\boxed{\text{Solución: } x = 1,\ y = 2,\ z = 3}$

· Ejercicios de sistemas de ecuaciones

Ej. 1. Discutir y resolver el siguiente sistema, si es posible. Con parámetros

$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx - y + 3z = 0 \\ x - 3y + mz = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ m & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & m & 0 \end{array}\right)$$

Cuando los términos independ. son cero → SIST. HOMOGÉNEO

Se cumple $\boxed{rg(A) = rg(A^*)}$

Lo 1° que debemos hacer es calcular el valor de m, con el $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 3 \\ 1 & -3 & m \end{vmatrix} = (-m - 3m + 3m) - (-1 - 9 + m^3) = -m + 10 - m^3 \rightarrow \text{RUFFINI}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & -1 & 10 \\ \text{m=2} \rightarrow 2 & & -2 & -4 & -10 \\ \hline & -1 & -2 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$-x^2 - 2x - 5$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - (4 \cdot (-1)(-5))}}{-2}$ = No tiene solución real.

$\boxed{m = 2}$ → Discutimos el sistema cuando m = 2 y cuando m ≠ 2.

Cuando m ≠ 2 → $|A| \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = N°\ incog. = \boxed{SCD}$

AL ser homogéneo todos los resultados serán cero. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Cuando m = 2

$\llcorner\ |A|_{3x3} = 0 \longrightarrow |A|_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow rg(A) = 2$

Como es un sistema homogéneo → $rg(A) = rg(A^*) = 2 \neq N°incog.$ $\boxed{SCI}$

- Resolvemos el sistema para $m=2$ (SCI) ∞ sol.

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -5y+z=0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{rrr|r} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{cases} \boxed{z=\lambda} \\ -5y+z=0 \longrightarrow -5y=-\lambda \longrightarrow \boxed{y=\frac{+\lambda}{+5}} \\ x+2y+z=0 \longrightarrow x+2\left(\frac{\lambda}{5}\right)+\lambda=0 \longrightarrow \boxed{x=\frac{-7\lambda}{5}} \end{cases}\right\}$$

SOLUCIÓN

$$x=\frac{-7\lambda}{5} \; ; \; y=\frac{\lambda}{5} \; ; \; z=\lambda$$

Ej. 2 JULIO 2013_A

a) Soluciones del sistema cuando $\alpha=7$.

b) Valores de α para que el sistema sea SCI.

c) valores de α para que el sistema sea SCD.

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 3x+5y+z=1 \end{cases}$$

a) $\boxed{\text{Si } \alpha=7}$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+y+z=1 \\ x+7y+z=1 \\ 3x+5y+z=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}}_{A} \begin{array}{|c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)}_{A^*}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (49+3+5)-(1+35+21)=0 \longrightarrow \text{NO SE PUEDE RESOLVER POR CRAMER.}$$

- Resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ son iguales}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 7 & 1 & 1 & 1 \\ - & 1 & 7 & 1 & 1 \\ \hline & 6 & -6 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 7 & 1 & 1 & 1 \\ - & 3 & 5 & 1 & 1 \\ \hline & 4 & -4 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 7x+y+z=1 \\ x-y=0 \\ \cancel{x-y=0} \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{x=\lambda} \longrightarrow x=y \longrightarrow \boxed{y=\lambda}$$

$$\longrightarrow 7(\lambda)+\lambda+z=1 \longrightarrow \boxed{z=1-8\lambda}$$

SCI. ∞ sol.

SOLUCIÓN

$$x=\lambda \; , \; y=\lambda \; , \; z=1-8\lambda$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2+5+3-3\alpha-5\alpha-1 = \alpha^2-8\alpha+7 \longrightarrow \alpha = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

- $\boxed{\text{Si } \alpha=1}$ $\longrightarrow |A|_{3\times3}=0 \longrightarrow |A|_{2\times2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow rg(A)=2$

El $|A^*|$ no es necesario calcularlo ya que tiene dos columnas $\longrightarrow$

iguales, y por tanto, se cumple que su rango será igual al rg (A).

$\boxed{rg(A^*) = rg(A)}$ porque tiene dos columnas iguales.

Entonces, cuando $\alpha = 1 \longrightarrow rg(A) = 2 = rg(A^*) \neq$ Nº incóg. $\Rightarrow$ $\boxed{SCI\ (\infty\ sol.)}$

- $\boxed{\text{Si } \alpha = 7} \longrightarrow |A|_{3x3} = 0$

$$\hookrightarrow |A|_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 2 = rg(A^*) \Rightarrow \boxed{SCI.}$$

Ocurre lo mismo que en el caso anterior, por tanto, el sistema es compatible indeterminado cuando $\boxed{\alpha = 1 \text{ y } \alpha = 7.}$

c) El sistema será compatible Determinado cuando el $|A| \neq 0$ para que su rango sea 3. $|A| \neq 0$ cuando α no valga ni 1 ni 7.

si $\boxed{\alpha \neq 1}$ y $\boxed{\alpha \neq 7} \longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ nº incóg. $\Rightarrow \boxed{SCD}$ (1 sol.)

Ej 2. JUNIO 2014_A

a) Discutir el sistema según valores de K.

b) Todas las soluciones del sistema cuando K = -1.

c) Resolver el sistema cuando K = 0

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + 4y + 5z = K - 2 \\ x + K^2 y + 3z = 2K \end{cases}$$

a) Calculamos el valor de K con el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & K^2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 15 + 4K^2 - 8 - 18 - 5K^2 = -K^2 + 1 \longrightarrow \boxed{K = \pm 1}$$

* Si $\boxed{K \neq -1}$ y $\boxed{K \neq 1} \longrightarrow |A| = 0 \longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ nº incóg. $\Rightarrow \boxed{SCD}$ (1 sol)

* Si $\boxed{K = -1} \longrightarrow |A|^*_{3x3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A|^*_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow rg\,A^* = 2$

$$\longrightarrow |A|_{3x3} = 0 \longrightarrow |A|_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow rg\,A = 2$$

$$rg(A) = 2 = rg(A^*) \neq N^{\circ}\ incóg. \longrightarrow \boxed{SCI}\ (\infty\ sol.)$$

* Si $\boxed{K = 1} \longrightarrow |A|_{3x3} = 0 \longrightarrow |A|_{2x2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \longrightarrow rg(A) = 2$

$\longrightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \longrightarrow rg(A^*) = 3$

$\boxed{rg\,A \neq rg\,A^* \quad \boxed{SI} \quad \text{No tiene sol.}}$

b) Cuando $K=-1$. Resolvemos. $\underline{\underline{SCI = \infty \text{ sol}}}$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \\ \cancel{x+y+3z=2K} \end{array}\right\}$$

Como ya hemos calculado antes, el rango de A es 2, por lo que tiene dos filas linealmente independientes. Podemos eliminar la 3ª, ya que no nos influye.

- $\boxed{z=\lambda} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y+2\lambda=-1 \\ 2x+4y+5\lambda=-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{array}{r} -\cancel{2x}-6y-4\lambda=2 \\ \cancel{2x}+4y+5\lambda=-3 \\ \hline -2y+\lambda=-1 \end{array} \longrightarrow \boxed{y=\frac{1+\lambda}{2}}$

- $x+3\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)+2\lambda=-1 \longrightarrow \boxed{\frac{-5-7\lambda}{2}}$

c) Cuando $K=0$. Resolvemos por Cramer porque $|A|\neq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-2 \\ x+3z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc:c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\begin{matrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{matrix}}^{A}} & \begin{matrix}-1\\-2\\0\end{matrix} \end{array}\right) \longrightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1}=\boxed{6} \qquad Y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{1}=\boxed{-1} \qquad Z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1}=\boxed{-2}$$

- Ejercicios de ecuaciones matriciales.

Ej. 1. **JUNIO 2018_B** Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$.

a) Valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$

b) Valores de α y β para los cuales $A^4=\alpha A+\beta I$

c) Det. de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que $(B)_{3x3}$ y $|B|=2$.

a) Hay dos formas de hacerlo, despejando la ecuación como si fuera una normal (cuidado con el orden), o multiplicando cada término por A^{-1}.

→ Método 1. Partiendo de $A^2+2A=3I$, despejamos primero I.

$$I=\frac{A^2+2A}{3} \xrightarrow{I=A\cdot A^{-1}} A\cdot A^{-1}=\frac{A^2+2A}{3} \longrightarrow A^{-1}=\frac{A^2+2A}{3A}$$

$$A^{-1}=\frac{A^{\cancel{2}}}{3\cancel{A}}+\frac{2A}{3A} \overset{A\cdot A^{-1}=I}{} \longrightarrow A^{-1}=\underset{a}{\frac{1}{3}}A+\underset{b}{\frac{2}{3}}I \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a=\frac{1}{3} \\ \hline b=\frac{2}{3} \end{array}}$$

→ Método 2. Multiplicamos por A^{-1} (a la derecha) todos los términos de la ecuación → $A^2 \cdot A^{-1} + 2A \cdot A^{-1} = 3I \cdot A^{-1}$ ⟶ $A \cdot \underbrace{(A \cdot A^{-1})}_{A \cdot A^{-1} = I} + 2\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = \underbrace{3A^{-1}}_{I \cdot A^{-1} = A^{-1}}$

$$\underbrace{AI}_{A \cdot I = A} + 2I = 3A^{-1} \longrightarrow A^{-1} = \frac{A + 2I}{3} = {\frac{1}{3}}_{a} A + {\frac{2}{3}}_{b} I$$

b) Resolvemos aplicando propiedades y sustituyendo, como anteriormente:

$[A^4 = A^2 \cdot A^2] \Longleftrightarrow A^2 + 2A = 3I \longrightarrow A^2 = 3I - 2A$

$$\hookrightarrow A^4 = (3I - 2A)(3I - 2A) = 9I^2 - 6AI - 6AI + 4A^2 = 9\underbrace{I^2}_{I \cdot I = I} - \overbrace{12AI}^{A \cdot I = A} + 4A^2 \longrightarrow$$

$$9I - 12A + 4(3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = \boxed{-20A + 21I}$$

$$A^4 = \underbrace{-20}_{\alpha}A + \underbrace{21}_{\beta}I \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha = -20 \\ \beta = 21 \end{array}}$$

c) Según las propiedades de los determinantes → $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$

Por tanto, $|B^{-1}| = \frac{1}{2}$

Como la matriz es de 3x3, se cumple que $2|B^{-1}| = 2^3 |B^{-1}|$, es decir, el nº que se multiplica por el det. debe elevarse al orden de la matriz.

$$2^3 |B^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{4}$$

Ej. 2 **JUNIO 2017_B**

a) Comprueba que $C^2 = 2C - I$ siendo $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula C^4. I_{3x3}

b) Det. de $(3A^4)(4A^2)^{-1}$. A_{4x4}. $|A| = -1$

c) (B), que tiene inversa y verifica $B \cdot B = B$

a) Debemos comprobar que $C^2 = 2C - I$. Calculamos $C^2 = C \cdot C$, y, $2C - I$:

- $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25+(-8)-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

- $2C - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Se obtiene el mismo resultado, por tanto, se cumple que $\boxed{C^2 = 2C - I}$