

# TEMA 1: MATRICES

## Determinantes de matrices

1. Calcula los siguientes determinantes de  $2 \times 2$ :

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Calcula los siguientes determinantes de  $3 \times 3$ :

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

3. Calcula los siguientes determinantes de  $3 \times 3$ :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 2 & 4\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

4. Calcula los siguientes determinantes de  $4 \times 4$ :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 4 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

5. Determina para qué valores de  $m$  se anulan los siguientes determinantes.

$$a) \begin{vmatrix} m & m & m \\ m & 0 & m \\ m & m & m \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & m+1 & 5 \\ 1 & m+2 & -3 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$



6. Calcula  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$  si  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$ .

7. Sabiendo que se cumple  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$  utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:

a)  $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$       b)  $\begin{vmatrix} -e & -f & -d \\ -b & -c & -a \\ -h & -i & -g \end{vmatrix}$

8. Calcula  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$  sabiendo que  $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100$ .

9. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

## SOLUCIONES

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a) 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$c) -1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = -4$$

$$b) 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 7$$

$$d) 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$$

2. Calcula los siguientes determinantes de 3x3:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$a) 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 3 = -50$$

$$b) (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 7$$

$$c) 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

3. Calcula los siguientes determinantes de 3x3:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -8$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 2 & 4\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4\sqrt{3}$$

4. Calcula los siguientes determinantes de  $4 \times 4$ :

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 50$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 4 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 6a^2 + 9a - 4$$

5. Determina para qué valores de  $m$  se anulan los siguientes determinantes.

a) El determinante se anula para cualquier valor de  $m$ , pues tiene dos filas (o dos columnas) iguales.

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}$$

c) Desarrollando el determinante por la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & m+1 & 5 \\ 1 & m+2 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (m+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (m+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -11m + 14 = 0 \Rightarrow m = \frac{14}{11}$$

6. Calcula  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix}$  si  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 60$$

7. Sabiendo que se cumple  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$  utiliza las propiedades de los determinantes para calcular:



$$a) \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = - \left( - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \right) = k$$

$$b) \begin{vmatrix} -e & -f & -d \\ -b & -c & -a \\ -h & -i & -g \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} e & f & d \\ b & c & a \\ h & i & g \end{vmatrix} = - \left( - \begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix} \right) =$$

$$- \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$$

8. Calcula  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$  sabiendo que  $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100$$

9. Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular este determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 2x+5 & 3x+4 \end{vmatrix}$$

Restando la segunda fila a la tercera y luego la primera a la segunda, se obtiene:

$$x \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 1 & 2x+3 & 3x+4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 2x+1 & 3x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4x$$