TEMA 1: MATRICES
Rangos de matrices

1. Calcula el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & a & 4a \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 2 & a & 3a \\ 3 & 2a & 4a \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ Determina los valores de m para los cuales rango (A)< 3. ¿Puede ser rg(A) = 1 para algún valor de m?

3. Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

4. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

5. Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

6. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

7. Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

8. Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

SOLUCIONES

1. Calcula el rango de las siguientes matrices

a) El determinante de la matriz es 0, pero si consideramos el determinante del menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego el rango es 2.

b) El determinante de la matriz es 0, pero tenemos un menor de orden 2 con determinante distinto de 0 (si $a \neq 0$), $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a$. Luego el rango es 2.

Salvo que $a = 0$, entonces el rango de la matriz es 1.

c) El determinante de la matriz es 0, pero tenemos un menor de orden 3 con determinante distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 32$$

Luego el rango es 3.

d) El determinante de la matriz es distinto de 0 (si $a \neq 0$), luego su rango es 3.

e) El determinante de la matriz es distinto de 0, luego su rango es 3.

f) La matriz no es cuadrada, pero tenemos un menor de orden 4 con determinante distinto de 0,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-4) = 8.$$

Luego el rango es 4.

2. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ Determina los valores de m para los cuales rango (A)< 3. ¿Puede ser rg(A) = 1 para algún valor de m?

Para que el rango sea menor que 3 el determinante de A debe ser igual a 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1, m = -3$$

Si $m = -1$ o $m = -3$ el rango de A es 2.

En ningún caso el rango de A será 1 puesto que existe un menor de orden 2 diferente de 0.

3. Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Si $m \neq 2$, el determinante de A es distinto de cero y, por tanto, su rango es 3.

Si $m = 2$, tenemos:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, el rango es 1 puesto que todas la filas son linealmente dependientes, también se puede argumentar que no se puede encontrar un menor de orden 2 diferente de cero.

4. Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad 2a(2a - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (B) \geq 2$

- **Si $a = 0$** $\rightarrow \quad |B| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (B) = 2$
- **Si $a = \dfrac{1}{2}$** $\rightarrow \quad |B| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (B) = 2$
- **Si $a \neq 0$ y $a \neq \dfrac{1}{2}$** $\rightarrow \quad |B| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (B) = 3$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = \ \ 1 \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow \quad |C| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow \quad |C| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow \quad |C| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) = 3$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$** $\rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (D) = 2$
- **Si $a = -1$** $\rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (D) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\rightarrow \quad |D| \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (D) = 3$

5. Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 2 & t & t^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 2t = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

- **Si $t = 1$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

- **Si $t = 2$** $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

  $\rightarrow ran\,(A) = 2$

- **Si $t \neq 2$** $\rightarrow ran\,(A) = 3$

b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} =$

$= t(t^2 - 3t + 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t = 1$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t = 2$** $\rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2$** $\rightarrow ran\,(B) = 3$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{vmatrix} = -3(3t-6) = 0 \rightarrow t = 2$

- **Si** $t = 2 \rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$

  $\rightarrow ran\,(C) = 2$

- **Si** $t \neq 2 \rightarrow ran\,(C) = 3$

6. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a)+(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ (3.^a)-5\cdot(2.^a)}]{(1.^a)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ (3.^a)+(1.^a) \\ (4.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ -2\cdot(3.^a)+(2.^a) \\ (4.^a)-4\cdot(2.^a)}]{(1.^a)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a)+(3.^a)}]{(1.^a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(D) = 3$$

7. Sea A una matriz de dos filas y dos columnas cuyo rango es 2. ¿Puede variar su rango si le añadimos una fila o una columna?

No, porque el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Si añadimos una fila, *A* seguiría teniendo dos columnas; y si añadimos una columna, *A* seguiría teniendo dos filas. Por tanto, el rango seguirá siendo 2.

8. Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?

b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante será 2?

a) Tendrá rango 2.
b) No. Podría ser 2 ó 1. Por ejemplo:

Si en $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ suprimimos la 1.ª fila y la 3.ª columna, queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

que tiene rango 1 (A tenía rango 3).