TEMA 1: MATRICES
Matriz Inversa

1. Calcula las inversas de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. Halla las matrices inversas de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ACADEMIA La llibreta
www.academialallibreta.es
C/Botánico 9 Bajo 46008 Valencia

6. Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ¿tiene inversa? Razona la respuesta.

8. Calcula por el método de Gauss la matriz inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

9. ¿Para qué valores de **m** la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

10. Calcular la inversa de A mediante el método de la matriz adjunta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

SOLUCIONES

1. Calcula las inversas de las siguientes matrices

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-6\\1&0&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

2. Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a)\\(2.^a)}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{(1.^a)+(2.^a)\\(2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{(1.^a)\\(-1/2)\cdot(2.^a)}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\-2&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(1.^a)}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&0&2&1\end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$ no tiene inversa.

3. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-4\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-7\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta de ceros. Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-3\cdot(3.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(3.^a) \\ (3.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-2\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+2\cdot(2.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ -5\cdot(2.^a)+(3.^a) \\ -(1/10)\cdot(3.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-3\cdot(3.^a) \\ -(1/5)\cdot(2.^a) \\ (3.^a)}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \ M \text{ no es inversa de } A.$$

$$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \ N \text{ es la inversa de } A.$$

5. Halla las matrices inversas de:

$$|A| = 2 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -4 \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 1 \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Aplica el método de Gauss-Jordan para calcular las inversas de las siguientes matrices:

Construimos la matriz $(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Transformamos la matriz anterior hasta obtener una matriz de la forma $(I_2 \mid A^{-1})$ del siguiente modo:

$$(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-\frac{4}{11}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{-4}{11} \\ 0 & 11 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/11 & 4/11 \\ 0 & 11 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{11}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right) = (I_2 \mid A^{-1})$$

Por tanto, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$. En efecto, $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}+\frac{8}{11} & \frac{-4}{11}+\frac{4}{11} \\ \frac{-6}{11}+\frac{6}{11} & \frac{8}{11}+\frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Construimos la matriz $(B \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

$$(B \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = (I_2 \mid B^{-1}). \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}. \text{ En efecto, } BB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Dada la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ¿tiene inversa? Razona la respuesta

La matriz A no tiene inversa, ya que no es cuadrada

8. Calcula por el método de Gauss la matriz inversa de las siguientes matrices

El esquema de partida es: $(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Se realizan transformaciones en las filas hasta obtener el la parte izquierda la matriz identidad, por lo que la parte derecha será la matriz inversa de A: A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+6F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-5F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1+4F_3 \\ -2F_3}]{F_2+5F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1})$$

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

El esquema de partida es: $(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid B^{-1})$$

La matriz inversa es, por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar que su producto con la matriz B es I.

9. ¿Para qué valores de **m** la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - m^2 - 6 - 0 - 1 - 0 = -m^2 - 7 \rightarrow$$

$$-m^2 - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad m = \pm\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor real de m

10. Calcular la inversa de A mediante el método de la matriz adjunta

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$