MATRICES

1. Escribe una matriz *A* de dimensión 2x5 cuyos elementos a_{ij} cumplan que $a_{ij} = i - j$

2. Siendo *A*, *B* y *X* matrices cuadradas despeja *X* en la ecuación: $XBA - XA = I$ simplificando lo más posible la expresión que resulte.

3. Dada la ecuación: $AX = X - B^t$, halla *X* para $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Resuelve $A^{-1}X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. Calculando A^2, A^3 y A^4 con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿podrías sospechar el resultado de A^{100} sin hacer los cien productos?

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula: $\frac{1}{2}(A+B)$, $3A - 2B$ y $(A \cdot B)^{1000}$

   b) Halla la matriz inversa de A comprobando el resultado

7. Halla el rango de la matriz con el método de Gauss: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

8. Sean $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halla k sabiendo que $M^2 - 6M + kI = O$.

9. Comprueba el cumplimiento de la propiedad distributiva $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ utilizando las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. Explica el significado de la siguiente frase: 'En una cierta matriz de dimensión 4x3, la 3ª fila depende linealmente de la 1º y 2ª filas'. Pon un ejemplo numérico explicando lo realizado.

11. A es una matriz de dimensión (3x2) y D es una matriz de dimensión (4x1). Halla las dimensiones de las matrices B, C y E sabiendo que: $A \cdot (B - C) \cdot D = 3E$

12. Razona la **falsedad** de las siguientes aseveraciones poniendo ejemplos que las contradigan:
    a) Al producto de dos matrices cuadradas de misma dimensión no le afecta el orden de los factores.
    b) Al multiplicar dos matrices obtendremos siempre un resultado distinto según el orden de los factores.
    c) Para comprobar si se cumple o no la conmutativa del producto siempre podremos realizar las dos multiplicaciones cambiando el orden de dos matrices.

1) $a_{ij} = i-j \quad \left(\begin{smallmatrix} i=1,2 \\ j=1,2,3,4,5 \end{smallmatrix}\right)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

2) $XBA - XA = I$

$X(BA-A) = I \rightarrow X = I \cdot (BA-A)^{-1} = \boxed{(BA-A)^{-1}}$

También:

$X(B-I)A = I \rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (B-I)^{-1}}$

3) $AX = X - B^t \; ; \quad AX - X = -B^t \; ; \quad (A-I)X = -B^t \; ; \quad X = -(A-I)^{-1} \cdot B^t$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F3 = F1 - F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1 = 2F1 - F3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F1 = -F1/2 \;\; F2 = -F2 \;\; F3 = F3/2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = -\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

4) $A^{-1}X = B \Rightarrow X = (A^{-1})^{-1} \cdot B = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}}$

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

- - - - - - - - - - - -

$\boxed{A^{100} = \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{pmatrix}}$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F2 = 2F1 - F2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1 = F1 - 2F2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow (A \cdot B)^{1000} = I^{1000} = \boxed{I}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ \boxed{2} & 1 & 1 \\ \boxed{3} & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3 = 3F1-F3]{F2=2F1-F2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & \boxed{10} & -6 \\ 0 & \boxed{5} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F4 = F2-F4]{F3=2F2-F3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rango} = 2}$

(8) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & - \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$

$M^2 - 6M + KI = 0$

$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -18 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -5+K & 0 \\ 0 & -5+K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{K=5}$

(9) $A(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

$A\cdot(B+C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ -3 & -2 & -15 \end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ -17 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$A\cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 14 & -1 & -11 \end{pmatrix}$

$\oplus$

(10) Significa que los elementos de la 3ª fila son iguales a una combinación lineal de la 1ª y 2ª filas.

Por ejemplo:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ← Esta 3ª fila depende linealmente de las dos primeras filas porque coincide con el doble de la 1ª menos la 2ª. (F3 = 2F1 − F2)

(11) $A\cdot(B-C)\cdot D = 3\cdot E$

$(3\times 2)\cdot(m\times n)\cdot(4\times 1) = (p\times q)$

B, C tienen que ser (2×4)

E " " " (3×1)

(12) a) FALSO. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$

Sí importa el orden de los factores

b) FALSO. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ No puede hacerse

c) FALSO. Podría salir lo mismo. Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$