TRABAJO DE MATRICES

2.2. Siendo A, B y C las anteriores matrices calcula la matriz X para que se cumpla:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ;\ C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ;\ D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) X + 2A = B + C **b) 2X – 3(A – B) = X – A**

a) $X = B + C - 2A \rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $2X - 3(A - B) = X - A \rightarrow X = 2A - 3B \rightarrow X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$

2.11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular si es posible:

a) A + B **b) A · C** **c) C · B** **d) (2A + B) · C** **e) $C^t \cdot \left(\frac{1}{2}B - A\right)$** **f) A^2**

a) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 7 & 7 & 17 \end{pmatrix}$

c) C · B no es posible

d) $(2A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 19 \\ 14 & 28 & 52 \end{pmatrix}$

e) $C^t \cdot \left(\frac{1}{2}B - A\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -\frac{9}{2} \\ -5 & \frac{15}{2} \\ -11 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

f) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

2.13. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que la matriz A verifica que $A^2 = 0$

b) Comprueba que la matriz B verifica que $B^2 = B$

c) Comprueba que $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$. ¿Será cierto en el caso en que las matrices no sean cuadradas?

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

c) $(A\cdot B)^t = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -24 & 8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$B^t\cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B = (1\ \ 2)$

$(A\cdot B)^t = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot(1\ \ 2)\right]^t = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \qquad B^t\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot(3\ \ -2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2: $A = (1\ \ 2\ \ 3);\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A\cdot B = (8\ \ 4) \to (A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad B^t\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

2.14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,se pide:

a) Calcular AB y BA, ¿coinciden los resultados?

b) Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$, ¿coinciden los resultados?

c) Calcular $A^2 - B^2$ y $(A - B)(A + B)$, ¿coinciden los resultados?

a) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -30 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 & -18 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & -32 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

$(A - B)\cdot(A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A + B)\cdot(A - B) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

2.17. Comprueba que $(A + I)^2 = 0$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$A + I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to (A + I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A + I)^2 = 0 \to (A + I)(A + I) = A^2 + 2A + I = 0 \to A^2 = -2A - I$

2.19. Comprueba que la matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $X^2 - 6X - I = 0$

$$X^2 - 6X - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^2 - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.20. Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2 = (A + B) \cdot B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.22. Hallar las matrices A y B que verifican el sistema:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \qquad -A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -2A + 10B = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 13B = \begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ A = 5B - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

3.4. Un importado de CD los importa de dos calidades, normales (N) y extra €. Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que vende a los siguientes precios en euros.

	2 unidades	5 unidades	10 unidades
Nomal N	0,4	0,8	1,2
Extra E	0,3	0,5	0,8

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Nomales N	Extras E
2 unidades	70.000	5.000
5 unidades	60.000	4.000
10 unidades	50.000	50.000

Se pide:

a) Resumir la información anterior en dos matrices A y B:
A una matriz 2 x 3 que recoja las ventas en un año
B una matriz 3 x 2 que recoja los precios

b) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz A por B y dar su significado.

c) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz B por A y dar su significado.

d) Comparar la suma de los elementos de las dos diagonales.

a) Matriz de ventas: $A = \begin{array}{c} \\ N \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2unid & 5unid & 10unid \end{array} \\ \begin{pmatrix} 70000 & 60000 & 50000 \\ 5000 & 4000 & 50000 \end{pmatrix} \end{array}$ Matriz de precios: $B = \begin{array}{c} \\ 2unid \\ 5unid \\ 10unid \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,5 \\ 1,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$

b) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 70000 & 6000 & 50000 \\ 5000 & 4000 & 50000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,5 \\ 1,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136000 & 91000 \\ 65200 & 43500 \end{pmatrix}$

c11 = 136.000 ingresos por ventas de CD normales

c22 = 43.500 ingresos por ventas de CD extras

c) $D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,8 & 0,5 \\ 1,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70000 & 6000 & 50000 \\ 5000 & 4000 & 50000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29500 & 25200 & 35000 \\ 58500 & 50000 & 65000 \\ 88000 & 75200 & 100000 \end{pmatrix}$

d11 = 29.500 ingresos por ventas de CD envasados en 2 unidades

d22 = 50.000 ingresos por ventas de CD envasados en 5 unidades

d33 = 100.000 ingresos por ventas de CD envasados en 10 unidades

d) La suma de los elementos de ambas diagonales es la misma: 179.500 €

3.5. En una acería se fabrican tres tipos de productos: aceros en láminas, en rollos o aceros especiales. Estos productos requieren chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades que se indican en la tabla siguiente, por cada unidad de producto fabricado:

	Acero en láminas	**Aceros en rollos**	**Aceros especiales**
Chatarra	**8**	**6**	**6**
Carbón	**5**	**6**	**4**
Aleaciones	**2**	**1**	**3**

Si durante el próximo mes se desean fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollos y 3 unidades de aceros especiales, obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.

Producto fabricado: $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz de producción: $P = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot P = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 66 \\ 25 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{chatarra} \\ \text{carbón} \\ \text{aleaciones} \end{array}$