TEMA 1: MATRICES

Ejercicio 1.-

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, calcula $BB^t - AA^t$.

Ejercicio 2.-

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, halla x e y para que se verifique $ABC = A^tC$.

Ejercicio 3.-

Si $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ¿se pueden encontrar matrices C y D para que existan los productos ACB y BDA?.

Ejercicio 4.-

Halla A^2, A^3, A^4 y A^5, siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se percibe algún patrón que permita adivinar cuánto vale A^{50} y en general A^n?.

Ejercicio 5.-

Encuentra todas las matrices X cuadradas de orden 2 que satisfacen la ecuación AX = XA con $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6.-

Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4X-3Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.-

Calcula el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$$

Según los valores del parámetro real m.

Ejercicio 8.-

Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ m & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de m no existe la matriz inversa de A?.

Ejercicio 9.-

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 10.-

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica que AXB = 2C.

Ejercicio 11.-

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12.-

Dadas las matrices :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ C $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ D $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y E $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Realiza, si es posible, los siguientes cálculos:

a) $A^t C \cdot C$
b) CD^t
c) $(B+E)^t$
d) DD^t
e) $A\ ^tC$
f) $(3E)^t$

Ejercicio 13.-

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

a) Calcula $A^2+2AB+B^2$
b) Calcula $(A+B)^2$

Ejercicio 14.-

Dadas las matrices :

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

a) Determina la dimensión de la matriz M para que pueda hacerse el producto AMC.
b) Determina la dimensión de N para que C^tN sea una matriz cuadrada.

Ejercicio 15.-

Sea la matriz 1x3 A = (1 2 a). Calcula el valor de a sabiendo que AA^t =5.

Ejercicio 16.-

Determina los valores de x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 17.-

Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix} \quad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Ejercicio 18.-

Sabiendo que el rango de la matriz $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 7 & 2 & -1\\ -11 & -4 & a\end{pmatrix}$ es 2, determina el valor de a.

Ejercicio 19.-

Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 6\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

h) $H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

i) $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

j) $J=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Ejercicio 20.-

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calcula C + AB, $C^{-1} + (AB)^{-1}$ y $(C+AB)^{-1}$

Ejercicio 21.-

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, calcula $AA^t - 5A^{-1}$, siendo A^t y A^{-1}, las matrices traspuesta e inversa de A, respectivamente.

Ejercicio 22.-

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, calcula el valor de a sabiendo que no tiene inversa.

Ejercicio 23.-

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix}k & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, halla los valores de k para los que la matriz BA tiene inversa.

Ejercicio 24.-

Encuentra una matriz X que verifique X – B^2 = A · B, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Ejercicio 25.-

Determina la matriz X que verifica AXA – B = $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, siendo A = $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Ejercicio 26.-

Prueba que la matriz B = $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Ejercicio 27.-

Si A es una matriz de orden n tal que A^2 = A y B = 2A – I, siendo I la matriz identidad de orden n, calcula B^2.

Ejercicio 28.-

Calcula las matrices A y B que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$2A - 2B = \begin{pmatrix}-6 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 29.-

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, comprueba que (A · B)^t = B^t · A^t.

Ejercicio 30.-

Comprueba que la matriz inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 31.-

Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 32.-

Calcula X tal que $X - B^2 = A \cdot B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 33.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

Ejercicio 34.-

Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

Utiliza esa igualdad para calcular A^4.

Ejercicio 35.-

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 0 \\ -3/5 & 6/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz X que verifica que XA = B, siendo A la matriz anterior y B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 36.-

Determina las matrices A y B que son solución del siguiente sistema matricial:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 15 & -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 37.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Ejercicio 38.-

Halla el valor de k para que el rango de la matriz A sea 2:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -1 \\ 0 & k & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 39.-

Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 40.-

Un industrial fabrica dos tipos de bombillas: transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos: M_1, M_2, M_3 y M_4.

$$\begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T & O \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 400 & 250 \\ 250 & 180 \\ 500 & 300 \end{pmatrix} \end{array}$$

Esta tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.
El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2 % en el modelo M_1, el 5 % en el M_2, el 8 % en el M_3 y el 10 % en el M_4.
Calcula la matriz que expresa el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas que se producen.

Ejercicio 41.-

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) Una matriz X tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Una matriz Y tal que $Y \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 42.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, halla el valor de x e y para que se cumpla la igualdad $A^2 - xA - yI = 0$.

Ejercicio 43.-

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A + A^2$

b) Resuelve el sistema $A^5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 44.-

Sean A y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 45.-

Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3.

a) ¿Cómo puede variar el rango si quitamos una columna?
b) Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante sea 2?.

Ejercicio 46.-

¿Es posible añadir una fila a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que la nueva matriz tenga rango 4?. Razona tu respuesta.

Ejercicio 47.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores de a:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & a \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 48.-

Calcula la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 49.-

Estudia el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 50.-

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 51.-

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla A^{-1} y B^{-1}.
b) Halla la matriz inversa de $A \cdot B$.

Ejercicio 52.-

Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

Ejercicio 53.-

Determina si las siguientes ecuaciones tienen solución. En caso afirmativo, determina la matriz solución:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES - MATRICES

1. $BB^t = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix}$ $AA^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $BB^t - AA^t = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$

2. $ABC = \begin{pmatrix} -X+2 \\ -X+2y \end{pmatrix}$ $A^tC = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$**.** Igualando se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -x+2=0 \\ -x+2y=2 \end{array}\right\} \text{cuya solución es x = 2 e y = 2.}$$

3. C cuadrada de orden 2 y D cuadrada de orden 3.

4. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en general $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y en particular $A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Las matrices han de ser diagonales.

6. $X = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$

7. Si m $\neq$ -15, el rango es 3.
Si m = -15, el rango es 2.

8. Para m = 1 no existe la inversa.

9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$. Por tanto, B = $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. $X = A^{-1} \cdot 2C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

11. Coincide con el ejercicio 9.

12.

a) $A^tC = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Por tanto, $A^tCC = \begin{pmatrix} -10 & -26 & 22 \\ -44 & -50 & -32 \\ -14 & -14 & -14 \end{pmatrix}$

b) No se puede realizar.

c) $(B+E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $DD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) Hecho en el apartado a).

f) $(3E)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

13. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$

$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

14.

a) M matriz cuadrada de orden 3.

b) C orden 3x2, C^t es de orden 2x3. N ha de ser de orden 3x2 y, por tanto, C^tN será cuadrada de orden 2.

15. a=0.

16. Multiplicando las matrices se obtiene que:

$$\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{matrix}\right\} \text{cuya solución es } x = \frac{-5}{4} \quad y = \frac{23}{4}$$

17. Rango A = 2, rango B = 3, rango C = 2, rango D = 3, rango E = 3.

18. Para que el rango sea 2 ha de ser a = 5.

19.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-5}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

e) $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

f) $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g) $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$

h) $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

i) $I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

20. $C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $(A{\cdot}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que se tiene que $C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(C + AB)^{-1} = I$.

21. Con cálculos previos, se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ A{\cdot}A^{t} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \right| \Rightarrow A{\cdot}A^{t} - 5{\cdot}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

22. Para a = 2 no tiene inversa.

23. Para cualquier valor de k tiene inversa.

24. $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 6 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$ $A{\cdot}B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 7 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ y por tanto, $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$

25. $X = A^{-1}BA^{-1}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ y por tanto $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

26. Tan sólo hay que probarlo.
27. B^2 es la identidad de orden n.

28. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

29. Es comprobarlo.

30. Hay que hacer los productos $A\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}\cdot A$ y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

31. Rango A = 3; Rango B = 2; Rango C = 2; Rango D = 4.

32. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $X=B^2+AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

33. $A^2=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $A^4=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$….

$A^{128}=A^2=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ -3 & -3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

34. Análogo al ejercicio 27.
35.
a) Hay que hacer los productos $A\cdot A^{-1}$ y $A^{-1}\cdot A$ y comprobar que, en ambos casos, se obtiene la identidad de orden 3.

b) $X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2\end{pmatrix}$

36. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -4 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$

37.
- Rango M = 3 para cualquier valor de k.
- Si k = -1/2 el rango de N es 2. Para $k \neq -1/2$ el rango es 3.
- Si k = -2, el rango de P es 1. Si $k \neq -2$, el rango es 2.
- Si k = 2, el rango de Q es 2. Si $k \neq 2$, el rango es 3.

38. Si k = 2, el rango es 2.

39. No es posible encontrar dicho valor de k.

41. $X = \begin{pmatrix} -1/11 & 9/11 & 1/11 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $Y = \begin{pmatrix} 3/11 & -5/11 & -3/11 \\ 6/11 & 12/11 & 5/11 \end{pmatrix}$

42. x = 3 ; y = -8.

43. a) $A + A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3/10 & 2 & 0 \\ 3/10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ b) x = 20; y = -5; z = -9

44. Ha de verificarse a = b = c

45. Si quitamos una columna el rango será 2.

46. No, ya que tiene rango 2.

47. Matriz M

- a $\neq$ -2,1 rango de M es 3
- Si a = -2 , el rango de M es 2
- Si a = 1, el rango de M es 2.

Matriz A

- a $\neq$ 0 rango de A es 3
- Si a = 0 , el rango de A es 2

48. Las inversas son:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \\ -3/4 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

49. a) Rango 3. b) Rango 2

50. Matriz A

- a $\neq$ 2 rango de A es 3
- Si a = 2 , el rango de A es 2.

Matriz B

- a $\neq$ -8,1 rango de B es 3
- Si a = -8 , el rango de B es 2

- Si a = 1, el rango de B es 2.

51. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 8 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -9 & 11 & -14 \end{pmatrix}$

52. Tiene inversa para cualquier valor de x distinto de 0.

Para x = 2 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

53.

a) No tiene solución, ya que no existe la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) La solución es $\begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$