Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A^{-1} = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Hay que resolver la ecuación $A \cdot X \cdot A^{-1} = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A$;

$I_3 \cdot X \cdot I_3 = A^{-1} \cdot B \cdot A$; *entonces, la matriz* X *pedida será* $X = A^{-1} \cdot B \cdot A$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = -1$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$; *ahora calculamos* $X = A^{-1} \cdot B \cdot A$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 2 & x-1 \\ 3z & 1 & z-1 \\ 3y & 0 & y-1 \end{vmatrix} \quad , \quad b) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x+4 & y & z+2 \end{vmatrix} \quad , \quad c) \left|2\left(A \cdot A^t\right)^{-1}\right|$$

Solución:

$$a) \begin{vmatrix} 3x & 2 & x-1 \\ 3z & 1 & z-1 \\ 3y & 0 & y-1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & x-1 \\ z & 1 & z-1 \\ y & 0 & y-1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(\underset{\overset{\uparrow}{0}}{\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ z & 1 & z \\ y & 0 & y \end{vmatrix}} - \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ z & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x+4 & y & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 10 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_2} =$$

$$= -2\cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$$

$$c)\ \left|2\left(A\cdot A^t\right)^{-1}\right| = 2^3\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \left(A\cdot A^t\right)^{-1}\in M_{3\times 3}}}{\left|\left(A\cdot A^t\right)^{-1}\right|} = 8\cdot \frac{1}{\left|A\cdot A^t\right|} = 8\cdot \underset{\substack{\uparrow \\ |A| = |A^t|}}{\frac{1}{|A|\cdot|A^t|}} = 8\cdot \frac{1}{5\cdot 5} = \frac{8}{25}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sea H el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $e_1=(a,2,-a,0)$, $e_2=(2,a,0,3)$, $e_3=(3,0,2,2)$ y $e_4=(2,a,2,-5)$. Encontrar a sabiendo que $H\neq \mathbb{R}^4$.

Solución:

H es el subespacio generado por $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$; *como* $H\neq\mathbb{R}^4$ *y* $\dim \mathbb{R}^4=4 \Rightarrow$ *los vectores* e_1, e_2, e_3 *y* e_4 *deben ser linealmente dependientes puesto que si no fuese así,* $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ *sería base de* $\mathbb{R}^4$ *y* $H=\mathbb{R}^4$.

Para que los vectores e_1, e_2, e_3 *y* e_4 *sean linealmente dependientes, el determinante que formamos con ellos tiene que ser cero.*

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 0 & a \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}_{C_4=C_4-C_2} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -8 \end{vmatrix}_{F_4=F_4+4F_3} = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 2 & 2 \\ -4a & 3 & 10 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{Desarrollamos \\ por\ la\ C_4}} = 2\cdot(-1)^{3+4}\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ -4a & 3 & 10 \end{vmatrix}_{F_3=F_3+4F_1} =$$

$$= -2\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 11 & 22 \end{vmatrix} = -22\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{C_3=C_3-2C_2} = -22\cdot \begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2a \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{\substack{desarrollamos \\ por\ la\ F_3}} = -22\cdot 1\cdot (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & -2a \end{vmatrix} = 22\left(-2a^2+2\right)$$

$$22\left(-2a^2+2\right)=0 \ \Rightarrow\ -2a^2+2=0 \ \Rightarrow\ a^2=1 \ \Rightarrow\ \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} 2\left(x^2-1\right) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2\left(x^2-1\right) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}_{\substack{Extraemos\,(x-1)\ de\ C_1 \\ Extraemos\,(x+1)\ de\ C_3}} = (x-1)\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 2(x+1) & x+1 & x+1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ x-1 & x-1 & x-1 \end{vmatrix}_{\substack{Extraemos\,(x+1)\ de\ F_1 \\ Extraemos\,(x-1)\ de\ F_3}} =$$

$$=(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{F_1=F_1-F_3 \\ F_2=F_2-F_3}} =(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{determinante\ de\ matriz \\ triangular}} =(x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot x$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2\cdot(x+1)^2\cdot x=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sabiendo que $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, probar que el sistema formado por los vectores $B'=\{u_1=e_1+e_2+e_3,\ u_2=e_1-e_2+e_3,\ u_3=2e_1+3e_3\}$ también es base de $\mathbb{R}^3$.

Dado el vector $v=(2,-1,5)$, cuyas coordenadas están expresadas en la base B, encontrar sus coordenadas en la base B'.

Solución:

$$\left.\begin{array}{lcl} u_1=e_1+e_2+e_3 & \Rightarrow & u_1=(1,1,1)\ en\ la\ base\ B \\ u_2=e_1-e_2+e_3 & \Rightarrow & u_2=(1,-1,1)\ en\ la\ base\ B \\ u_3=2e_1+3e_3 & \Rightarrow & u_3=(2,0,3)\ en\ la\ base\ B \end{array}\right\}$$

para que $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ *sea base de* $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B'$ *tiene que ser un sistema de generadores y sistema libre.*

Como sabemos que $\dim\mathbb{R}^3=3$ *y* B' *está formado por tres vectores, si estos son linealmente independientes son base de* $\mathbb{R}^3$.

Veamos que B' *es un sistema libre, para ello consideramos el determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{las tres columnas del determinante son linealmente independientes.}$$

Por tanto B' *es una base de* $\mathbb{R}^3$

Busquemos ahora las coordenadas del vector v *en la base* B'.

$$\left.\begin{array}{l} v=(2,-1,5) \text{ en } B \ \Rightarrow \ v = 2e_1 - e_2 + 5e_3 \\ v=(x,y,z) \text{ en } B' \ \Rightarrow \ v = x\cdot u_1 + y\cdot u_2 + z\cdot u_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 2e_1 - e_2 + 5e_3 = x\cdot u_1 + y\cdot u_2 + z\cdot u_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2e_1 - e_2 + 5e_3 = x\cdot(e_1+e_2+e_3) + y\cdot(e_1-e_2+e_3) + z\cdot(2e_1+3e_3) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2e_1 - e_2 + 5e_3 = (x+y+2z)\cdot e_1 + (x-y)\cdot e_2 + (x+y+3z)\cdot e_3 \ \ , \textit{ entonces, como } \{e_1, e_2, e_3\} \textit{ son base de } \mathbb{R}^3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *cualquier vector de* $\mathbb{R}^3$ *se puede poner como combinación lineal de ellos de forma única, por tanto:*

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-y=-1 \\ x+y+3z=5 \end{cases} \quad (3^{\text{a}}\,ec. - 1^{\text{a}}\,ec.) \Rightarrow \ z=3 \ \Rightarrow \ \textit{tenemos} \begin{cases} x+y=-4 \\ x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \ x=-\frac{5}{2} \ , \ y=-\frac{3}{2}$$

$$\textit{con lo que} \quad v = -\frac{5}{2}\cdot u_1 - \frac{3}{2}\cdot u_2 + 3\cdot u_3 \quad \Rightarrow \quad v = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 3\right) \textit{ en la base } B'$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

– Calcular el valor de $|2A\cdot A^t|$.

– Calcular el valor de $|A^t\cdot A|$.

Solución:

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |2A\cdot A^t| = 2^3\cdot|A\cdot A^t| = 8\cdot\begin{vmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot 99 = 792$$

$$A^t\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A^t\cdot A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{F_1=F_1+F_2 \\ F_4=F_4-2F_1}} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -11 & -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\textit{desarrollamos por } C_4}{=} 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & -11 & -4 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2+3F_1 \\ F_4=F_4-4F_1}} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 12 & 20 & 0 \\ -21 & -35 & 0 \end{vmatrix}_{\textit{desarrollamos por } C_3} = -1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 12 & 20 \\ -21 & -35 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 4\cdot(-7)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-a & 0 & a\\ a & a-1 & 0\\ a & a & a+2\end{pmatrix}$, encontrar los valores de a para los que la matriz admite inversa y calcular dicha inversa para $a=-1$.

Solución:

$$A^{-1}\ existe\ \Leftrightarrow\ |A|\neq 0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-a & 0 & a\\ a & a-1 & 0\\ a & a & a+2\end{vmatrix}_{C_3=C_3+C_1}=\begin{vmatrix}-a & 0 & 0\\ a & a-1 & a\\ a & a & 2a+2\end{vmatrix}_{desarrollamos\ por\ F_1}=-a\cdot\begin{vmatrix}a-1 & a\\ a & 2a+2\end{vmatrix}=-a\cdot\left[(a-1)(2a+2)-a^2\right]=$$

$$=-a\cdot(a^2-2)\ \Rightarrow\ -a(a^2-2)=0\ \Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=\sqrt{2}\\ a=-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\ A\ admite\ inversa\ para\ \ a\neq 0\ ,\ a\neq\sqrt{2}\ ,\ a\neq-\sqrt{2}$$

$$Calculemos\ ahora\ A^{-1}\ para\ a=-1.\ \ |A|=-a\cdot(a^2-2)\Rightarrow |A|=-(-1)\left((-1)^2-2\right)=-1$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-2 & A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1 & A_{31}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-2\\ A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1 & A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0 & A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\\ A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1 & A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1 & A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2\end{matrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, encuentra X tal que $A+X\cdot B=C$.

Solución:

$$Como\ \ A,\,B\ y\ C\ son\ matrices\ de\ orden\ 2\times 2\ \Rightarrow\ X\in M_{2\times 2}\ \Rightarrow\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

$$Por\ otro\ lado\ \ A+X\cdot B=C\ \ \Leftrightarrow\ \ X\cdot B=C-A\ \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2a+b=-2 \\ a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-2 \ , \ b=2 \\ \\ \left.\begin{array}{l} 2c+d=2 \\ c+d=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow c=3 \ , \ d=-4 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

También podemos resolverlo así: $X \cdot B = C - A \Rightarrow X = (C-A) \cdot B^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 1 \quad \begin{array}{ll} B_{11} = 1 & B_{21} = -1 \\ B_{12} = -1 & B_{22} = 2 \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ C - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$