SÈRIE 0

Exercici 1.

a) La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0{,}4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 km o de 80 km només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \qquad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \qquad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b) Per trobar el valor pel qual les dues tarifes coincideixen hem de resoldre l'equació:

$$0{,}4x + 20 = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$$

$x^2 - 30x - 1000 = 0$ que té per solucions $x = 50$ i $x = -20$.

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km, les dues tarifes coincideixen.
Per a distàncies entre 0 km i 50 km, observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0{,}50]$ vindrà donada per la funció:
$D(x) = 0{,}4x + 20 - (0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 10$. Per trobar el màxim calculem la derivada:
$D'(x) = -0{,}02x + 0{,}3$,
la igualem a zero i obtenim $x = 15$.
Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i, per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$, i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.
Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12{,}25$ euros.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas, es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor pel qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor pel qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.

Exercici 2.

a) Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z, s'obté el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat ja que tant el rang de matriu com de la matriu ampliada és 2 i en canvi tenim tres incògnites; per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació i obtenim $y = 630$ sofàs.

b) Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1260 \\ x - y + z = 0 \\ 0{,}1\,x + 0{,}3\,y + 0{,}2\,z = 284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem la última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 1260 \\ x + 3y + 2z = 2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre x, y, z, obtenim la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat, ja que tant el rang de la matriu, com el de la matriu ampliada com el nombre d'incògnites és 3. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat; la segona, 630, i la tercera, 320.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas, es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.

Exercici 3.

a) La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0{,}6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0{,}1)$ s'obté a partir de la fórmula:

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), P$(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són:

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 + 1.96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37%, amb una confiança del 95%.

b) Considerem els esdeveniments:

$A =$ l'individu escollit és del poble A

$B =$ l'individu escollit és del poble B

$F =$ l'individu està a favor de la construcció del poliesportiu

Sabem que $P(A) = \frac{250}{425} = \frac{10}{17} = 0{,}5882$, $P(B) = \frac{175}{425} = \frac{7}{17} = 0{,}4118$.

Si sabem que l'individu és del poble A, la probabilitat que estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$P(F|A)=\frac{180}{250}=\frac{18}{25}=0{,}7200.$$

D'altra banda, si sabem que l'individu és del poble B, la probabilitat que estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$P(F|B)=\frac{90}{175}=\frac{18}{35}=0{,}5143.$$

Per tant, usant la fórmula de les probabilitats totals, tenim que la probabilitat que l'individu estigui a favor de la construcció del poliesportiu és:

$$P(F)=P(F\cap A)+P(F\cap B)=P(F|A)P(A)+P(F|B)P(B)=\frac{18}{25}\cdot\frac{10}{17}+\frac{18}{35}\cdot\frac{7}{17}$$
$$=\frac{54}{85}=0{,}6353.$$

Així doncs, la probabilitat que l'individu estigui a favor de la construcció del poliesportiu és de 0,64.

Ara ens demanen:

$$P(A|F)=\frac{P(F|A)\cdot P(A)}{P(F)}=\frac{\frac{18}{25}\cdot\frac{10}{17}}{\frac{54}{85}}=\frac{2}{3}=0{,}6667.$$

La probabilitat que l'individu sigui del poble A, si sabem que està a favor de la construcció del poliesportiu, és de 2/3.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,25 punts. Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat total: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,25 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

Exercici 4

OPCIÓ A

a) Si el tractor fa el recorregut a x km/h, obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{x}$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor, en funció de la velocitat en quilòmetres per hora, x, serà:

$$C(x) = \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 1{,}96 + \frac{300}{x} \cdot 14{,}70 = 300\left(\frac{24{,}5}{x} + 0{,}02x\right).$$

b) Sabem de l'apartat a) que els costos si el poble es troba a 300 km venen donats, en funció de la velocitat x, per la funció:

$$C_{300}(x) = 300\left(\frac{24{,}5}{x} + 0{,}02x\right).$$

Pels mateixos arguments, si el poble està situat a 200 km o a 100 km la funció dels costos en funció de la velocitat x serà:

$$C_{200}(x) = 200\left(\frac{24{,}5}{x} + 0{,}02x\right).$$

$$C_{100}(x) = 100\left(\frac{24{,}5}{x} + 0{,}02x\right).$$

Substituint la velocitat x pels valors de 35, 25 i 15 km/h obtenim la matriu de costos en funció de la velocitat i de la distància del poble:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 100 & 200 & 300 \end{array} \\ \begin{array}{c} 35 \\ 25 \\ 15 \end{array} & \begin{pmatrix} 140 & 280 & 420 \\ 148 & 296 & 444 \\ \frac{580}{3} & \frac{1160}{3} & 580 \end{pmatrix} \end{array}$$

Per trobar el cost de portar els tractors als diferents pobles, haurem de fer el producte de matrius:

$$\begin{pmatrix} 140 & 280 & 420 \\ 148 & 296 & 444 \\ \frac{580}{3} & \frac{1160}{3} & 580 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2100 \\ 2220 \\ 2900 \end{pmatrix}.$$

Obtenim que el cost de portar tots els tractors serà de 2.100 € si els tractors van a 35 Km/h; serà de 2.220 €, si circulen a 25 Km/h, i, finalment, serà de 2.900 € si van a 15 km/h.

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas, es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

a) Càlcul del temps necessari per fer el trajecte: 0,25 punts. Càlcul del cost del gasoil: 0,25 punts. Càlcul del cost del conductor: 0,25 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x: 0,5 punts.

b) Obtenció de la matriu: 0,75 punts. Càlcul del producte de matrius: 0,25 punts. Resultat final: 0,25 punts.

OPCIÓ B

a) Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$.
Comencem calculant la derivada:

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6$$

Si la igualem a zero obtenim que x=$\pm\sqrt{\frac{7350}{6}} = \pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x = 35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de: $C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420$ €

b) Considerem la variable X que compta el nombre de cops que s'atura el conductor. Aquesta variable segueix una distribució binomial de paràmetres $n = 3$, perquè hi ha tres àrees de servei, i $p = \frac{1}{3}$ que correspon a la probabilitat que s'aturi a cada una de les àrees.

Per tant, la probabilitat que no s'aturi cap vegada és:

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} = 0{,}2963.$$

D'altra banda, la probabilitat que s'aturi exactament dues vegades serà:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} = 0{,}2222.$$

Criteris de correcció:

Cal que la redacció de la resposta s'hagi fet de manera coherent, amb correcció i claredat, emprant la notació i el vocabulari matemàtic adequats i expressant la solució de manera clara. Si no és el cas es pot descomptar fins a un màxim de 0,25 punts.

a) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.

b) Identificació de la distribució binomial: 0,25 punts. Càlcul de la probabilitat que no s'aturi cap cop: 0,5 punts. Càlcul de la probabilitat que s'aturi exactament dos cops: 0,5 punts.