El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción I y Opción II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. El trabajo de Gema y Fernando sobre la evolución de la contaminación acústica de su ciudad ha sido seleccionado como el mejor de su instituto. Además del reconocimiento, les han premiado con dos entradas para un partido del Casademont femenino. A ambos les gustaría ir juntos, pero les da vergüenza reconocerlo. Así que deciden sortear quién se las queda. Inicialmente, proponen tirar una moneda tres veces cada uno. Quien obtenga más caras gana las dos entradas. En caso de empate, no gana nadie y se irán juntos al partido. Fernando piensa que, como hay tres situaciones posibles, la probabilidad de que empaten es un tercio.

a) *(0,75 puntos)* ¿Tiene razón Fernando al pensar que la probabilidad de empate con el sorteo de la monedas sería un tercio? En caso de no tener razón, ¿en cuánto se equivoca?

Así que decide proponer un sorteo más elaborado con idea de aumentar la probabilidad de empate. Cada uno de ellos pensará una función y tirará un dado de seis caras no trucado tres veces. Si el valor de la derivada de su función evaluada en el valor que saque el dado es mayor o igual a cero, consigue un punto. Quien más puntos obtenga con sus tres tiradas, gana. En caso de empate, se van juntos al partido. A Gema le encantan las matemáticas, así que acepta inmediatamente. Ella escribe en su papel su función, $g(x) = e^x$ pensando que Fernando también elegirá una función cuya derivada sea siempre positiva. Para su sorpresa, la función de Fernando es $f(x) = \cos(2x)$. Así que, rápidamente, para obtener la máxima probabilidad de empate, cambia su función por otra cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

b) *(0,5 puntos)* Propón una función que cumpla las características que busca Gema una vez conoce la función propuesta por Fernando.

c) *(0,75 puntos)* ¿Ha conseguido Fernando su propósito de aumentar la probabilidad de empate?

d) *(0,5 puntos)* Si Fernando hubiera visto la función $g(x)$ que tenía pensada Gema inicialmente, ¿cómo tendría que haber elegido su función para lograr la máxima probabilidad de empate?

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos del espacio y $\vec{v}_1$ el vector que va de A a B; $\vec{v}_2$ el vector que va de B a C y $\vec{v}_3$ el vector que va de C a A.

a) *(1,25 punto)* Estudia si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

b) *(1,25 puntos)* Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

2.2 Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{array} \right.$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$.

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 **a)** *(1 punto)* Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}\mathrm{d}x.$$

b) *(1,5 puntos)* Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r.

3.2 **a)** *(1 punto)* Sea $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$. Calcula, utilizando el cambio de variable $x = 1 + t$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{p(x)}.$$

b) *(1,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{p(x)}$, calcula sus asíntotas, cuando existan, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1,3 puntos) Estudia si existe alguna matriz columna no nula B tal que $A \cdot B = B$. En caso afirmativo, calcula dicha matriz B.

b) (1,2 puntos) Sea C una matriz columna no nula tal que $A \cdot C = -C$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot C = -C$.

4.2 Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.