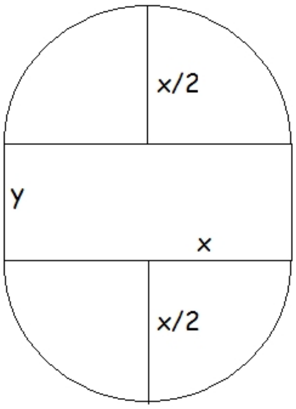
PROBLEMA A.3. Se quiere construir un estadio vallado de 1000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

a) La longitud del perímetro del campo en función de x. *(3 puntos)*
b) El coste f(x) de la valla en función de x. *(3 puntos)*
c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. *(4 puntos)*

Solución:
La forma del estadio vallado será,



a) El perímetro a vallar medirá: $2y + 2\pi\ x/2 = 2y + \pi\ x$

Para poder expresar el perímetro en función de x, hay que buscar la relación entre x e y.
La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del estadio ($10000\ m^2$)
El estadio está formado por un rectángulo y dos semicírculos,
- rectángulo de lados x e y $\rightarrow$ $A_R = x\,y$
- dos semicírculos de radio x/2 $\rightarrow$ $A_{SC} = (1/2)\,\pi\,(x/2)^2 = (1/2)\,\pi\,(x^2/4) = \pi\,x^2/8$
el área de los dos semicírculos será: $2\,\pi\,x^2/8 = \pi\,x^2/4$

$$\text{Área del estadio} = xy + \frac{\pi}{4}x^2$$

$$\text{Luego}\quad 10000 = xy + \frac{\pi}{4}x^2 \qquad \text{despejemos } y$$

$$10000 - \frac{\pi}{4}x^2 = xy \quad \rightarrow \quad y = \frac{10000 - \frac{\pi}{4}x^2}{x} = \frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x$$

$$\text{Finalmente,}\quad P(x) = 2\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\,x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + \pi\,x = \frac{20000}{x} + \frac{\pi}{2}x$$

b) Coste de la valla,

$$f(x) = 1\,.\,2\,.\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + 2\,\pi\,x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + 2\pi\,x = \frac{20000}{x} + \frac{3\pi}{2}x$$

c) x / coste de la valla sea mínimo

Debemos buscar el mínimo de $f(x) = \dfrac{20000}{x} + \dfrac{3\pi}{2}x$

Previamente nos interesa conocer el dominio de f(x). Como x representa la longitud del lado de un rectángulo debe ser un número positivo. Además, en la definición de la función la x está en el denominador (no puede ser 0). Por lo tanto Dom f(x) = (0 , +∞)

$$f'(x) = \frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

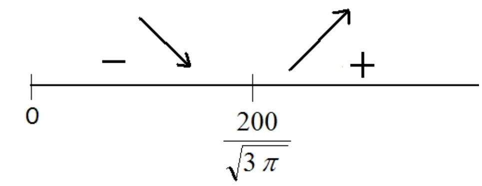
$$\frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{20000}{x^2} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{40000}{3\pi} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{40000}{3\pi}} = \pm\frac{200}{\sqrt{3\pi}} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{200}{\sqrt{3\pi}} \approx 65´1470 \\ x_2 = \dfrac{-200}{\sqrt{3\pi}} \notin Dom\ f(x) \end{array} \right.$$

Representamos en la recta real el dominio de f(x) y el valor de x obtenido anteriormente y estudiamos el signo de f´(x) en los dos intervalos que obtenemos,

x	$f'(x)$
1	$\frac{-20000}{1^2} + \frac{3\pi}{2} = -19995´2876 < 0$
100	$\frac{-20000}{100^2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{-20000}{10000} + \frac{3\pi}{2} = -2 + \frac{3\pi}{2} = 2´7124 > 0$

luego



Por lo que el mínimo relativo se alcanza para $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ *que además es el mínimo absoluto puesto que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.*

Solución: ***el coste de la valla es mínimo para*** $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ ***≈ 65´147 m***