PROBLEMA B.3. Dada la función polinómica $f(x) = 4 - x^2$, se pide obtener razonadamente:

a) La gráfica de la curva $y = 4 - x^2$. *(2 puntos)*

b) El punto P de esa curva cuya tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x + y = 0$. *(3 puntos)*

c) Las rectas que pasan por el punto $(-2, 1)$ y son tangentes a la curva $y = 4 - x^2$, obteniendo los puntos de tangencia. *(5 puntos)*

Solución:

a) Gráfica de $y = 4 - x^2$

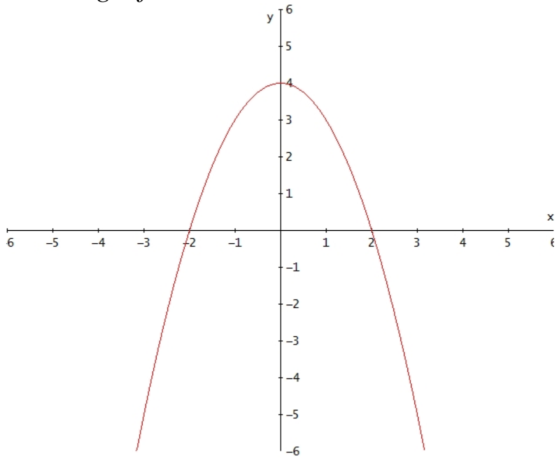
Esta función es un polinomio de segundo grado, gráficamente es una parábola. Para representarla basta con calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

Corte con el eje OX $\rightarrow$ $x = 0,\ y = 4 - 0^2 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow$ $y = 0,\ 0 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (2, 0)$ *y* $(-2, 0)$

Vértice $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2(-1)} = 0 \rightarrow (0, 4)$

La representación gráfica de esta curva será:



Otra forma de obtener la gráfica de esta curva sería mediante su estudio. Veámoslo,

$y = 4 - x^2$

Es una función polinómica por lo tanto su dominio es el conjunto de los números reales y no tiene asíntotas. Las ramas las estudiaremos si es necesario.

Dom y = R

Puntos de corte,

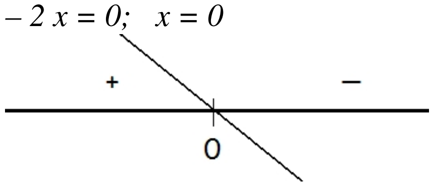
Corte con el eje OX $\rightarrow$ $x = 0,\ y = 4 - 0^2 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Corte con el eje OY $\rightarrow$ $y = 0,\ 0 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (2, 0)$ *y* $(-2, 0)$

Monotonía,

$y' = -2x;$

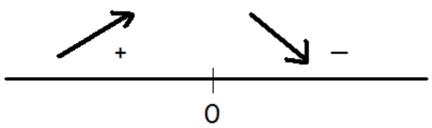
$-2x = 0;\quad x = 0$



Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$

Máximos-Mínimos

Del estudio anterior obtenemos que,



Luego en el punto $(0, 4)$ hay un máximo

La representación gráfica de esta curva será la realizada anteriormente.

b) Buscamos un punto P є { $y = 4 - x^2$ } / { recta tangente a y en P } $\perp$ { $x + y = 0$ }

Sea P (a , b), la recta tangente a la curva en este punto tiene por pendiente $y'_{x=a}$

$y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$

La pendiente de la recta $x + y = 0$ { $y = -x$ } es -1

Como las dos rectas deben ser perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1, luego

$(-2a) \cdot (-1) = -1; \quad 2a = -1; \quad a = -1/2$

Calculemos la ordenada del punto P,

$$a = \frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad b = 4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Por lo tanto el punto P buscado será el $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{4}\right)$

c) Rectas tangentes a la curva { $y = 4 - x^2$ } que pasan por (– 2 , 1)

Sea ($a , 4 - a^2$) el punto de tangencia entre la recta y la parábola.

Como la recta debe pasar por los puntos (– 2 , 1) y ($a , 4 - a^2$), la pendiente de esta recta será:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - a^2 - 1}{a - (-2)} = \frac{3 - a^2}{a + 2}$$

Como la recta debe ser tangente a la parábola en el punto ($a , 4 - a^2$), la pendiente de esta recta debe ser:

$y'_{x=a}$, *como* $y' = -2x \rightarrow y'_{x=a} = -2a$

Por lo tanto:

$$\frac{3 - a^2}{a + 2} = -2a \quad \rightarrow \quad 3 - a^2 = -2a^2 - 4a \quad \rightarrow \quad a^2 + 4a + 3 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 . 1 . 3}}{2 . 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{-4 + 2}{2} = -1 \\ \dfrac{-4 - 2}{2} = -3 \end{cases}$$

Los puntos de tangencia, ($a , 4 - a^2$), serán:

para $a = -1 \rightarrow (-1 , 4 - (-1)^2) = (-1 , 3)$

para $a = -3 \rightarrow (-1 , 4 - (-3)^2) = (-3 , -5)$

Las rectas, que pasan por el punto (– 2 , 1), serán:

para $a = -1 \rightarrow m = -2(-1) = 2$	*para* $a = -3 \rightarrow m = -2(-3) = 6$
$y - 1 = 2(x - (-2))$	$y - 1 = 6(x - (-2))$
$y - 1 = 2(x + 2)$	$y - 1 = 6(x + 2)$
$y - 1 = 2x + 4$	$y - 1 = 6x + 12$
$y = 2x + 5$	$y = 6x + 13$

Solución:

recta $y = 2x + 5$ *y punto de tangencia* (– 1 , 3)

recta $y = 6x + 13$ *y punto de tangencia* (– 3 , – 5)