PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx=\int\frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2-3x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=2\\[2mm]\dfrac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Por lo que $Dom\ f(x)=\Re-\{1,2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = 2.

x = 1

$$\underset{x\to 1}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1^2-3\,.\,1+2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1\ es\ a.v.$$

x = 2

$$\underset{x\to 2}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{2}{2^2-3\,.\,2+2}=\frac{2}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=2\ es\ a.v.$$

Asíntota horizontal,

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{x}{x^2}=\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{x}{x^2}=\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,
La asíntota oblicua será la recta de ecuación y = m x + n; calculando los coeficientes m y n

$$m=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\dfrac{x}{x^2-3x+2}}{x}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x}{x^3-3x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{x}{x^3}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Como m = 0, no hay asíntota oblicua.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x),

Estudiemos el signo de y´,

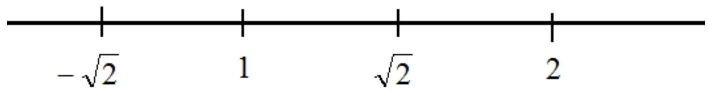
$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

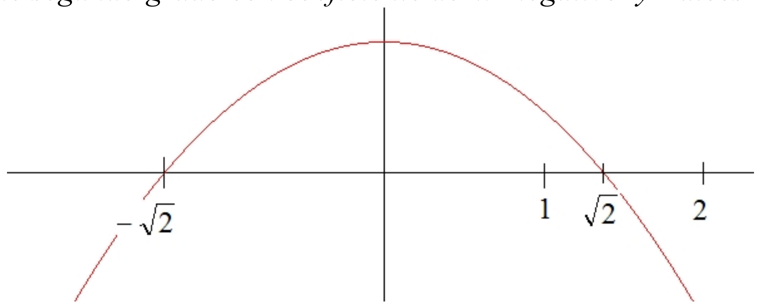
$-x^2+2=0 \quad\rightarrow\quad x^2=2 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-3x+2=0 \quad\rightarrow\quad (\textit{resuelta en el apartado a})\ ) \quad x=1,2$

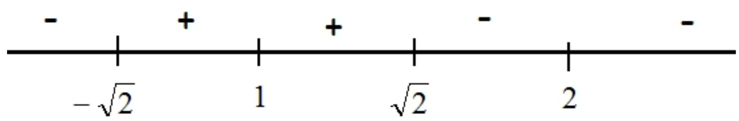
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y´ está elevado al cuadrado, el signo de y´ sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces* $\pm\sqrt{2}$*, es decir:*



Por lo que el signo de y´ será:



Finalmente f(x) es creciente en $\left(-\sqrt{2}\,,1\right)\cup\left(1\,,\sqrt{2}\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty\,,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}\,,2\right)\cup\left(2\,,+\infty\right)$.

c) Cálculo de la integral,

El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*

para $x=1 \;\rightarrow\; 1=-A+0 \;\rightarrow\; A=-1$

para $x=2 \;\rightarrow\; 2=0+B\cdot 1 \;\rightarrow\; B=2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{-1}{x-1}\,dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\left|x-1\right| + 2\,Ln\left|x-2\right| + C$$