PROBLEMA A.3. Dada la función f definida por

$$f(x)=x^2\ e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. *(2 puntos)*

b) Los valores de x donde la función $f(x)=x^2\ e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f. *(2 puntos)*

d) Los valores de x donde la función $f(x)=x^2\ e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

e) La gráfica de la curva $y=x^2\ e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio:

Tanto x^2 *como* e^{-x} *se pueden calcular para cualquier número real x, por lo que* $Dom\ f(x)=\Re$

Recorrido:

$\forall\, x\in\Re,\quad x^2\geq 0 \quad y \quad e^{-x}>0 \quad\Rightarrow\quad x^2\, e^{-x}\geq 0$. *Por lo que* $Im\ f(x)=[0\,,+\infty\,)$

b) Calculemos f´(x),

$f'(x)=2\,x\,e^{-x}+x^2\,e^{-x}(-1)=2\,x\,e^{-x}-x^2\,e^{-x}=(2x-x^2)\,e^{-x}$

Igualamos la primera derivada a cero para buscar los posibles extremos de f(x)

$(2x-x^2)\,e^{-x}=0$

$$como\quad e^{-x}\neq 0\quad \forall x\in\Re\ \rightarrow\ 2x-x^2=0\ \rightarrow\ x(2-x)=0\left\langle\begin{array}{l} x=0\\ 2-x=0\ \rightarrow\ x=2\end{array}\right.$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si para estos valores de x f(x) alcanza un extremo relativo.

$f''(x)=(2-2x)\,e^{-x}+(2x-x^2)\,e^{-x}(-1)=(2-2x)\,e^{-x}-(2x-x^2)\,e^{-x}=(2-2x-2x+x^2)\,e^{-x}=(x^2-4x+2)\,e^{-x}$

$x=0,\quad f''(0)=2\,e^0=2>0\ \rightarrow\ mínimo\quad relativo$

$x=2,\quad f''(2)=(4-8+2)2\,e^{-2}=-2\,e^{-2}<0\ \rightarrow\ máximo\quad relativo$

Por lo tanto, la función f(x) alcanza el máximo relativo en x = 2 y el mínimo relativo en x = 0.

Calculemos los puntos correspondientes para usarlos en el apartado e):

para $x=0$, $f(0)=0^2\,.\ e^{-0}=0\ \rightarrow$ *en* $(\,0\,,\,0\,)$ *mínimo relativo*

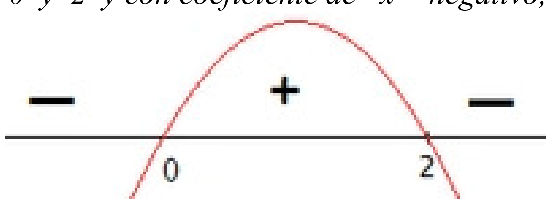
para $x=2$, $f(2)=2^2\,.\ e^{-2}=4\,e^{-2}\ \rightarrow$ *en* $(\,2\,,\,4\,e^{-2}\,)\approx(\,2\,,\,0'5413\,)$ *máximo relativo*

c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de f´(x).

Por lo calculado en el apartado anterior sabemos que $f'(x)=(2x-x^2)\,e^{-x}$ *y* $f'(x)=0\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Como $\forall\,x\in\Re,\ e^{-x}>0$, *el signo de f´(x) depende de* $(\,2\,x-x^2\,)$ *que es un polinomio de 2º grado cuyas raíces son 0 y 2 y con coeficiente de* x^2 *negativo, luego el signo de f´(x) es:*



Por lo tanto:

f(x) es creciente en $(\,0\,,\,2\,)$ *y*

f(x) es decreciente en $(-\infty\,,0\,)\cup(\,2\,,+\infty)$

d) Puntos de inflexión.

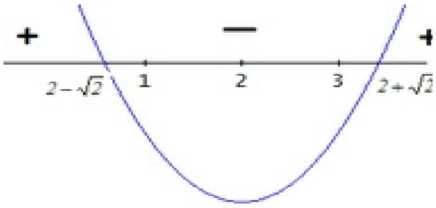
Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

Del apartado b) sabemos que: $f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\ e^{-x}$

En $f''(x)$ *el factor* e^{-x} *es siempre positivo, luego el signo de* $f''(x)$ *depende del otro factor que es un polinomio de* 2^o *grado con coeficiente de* x^2 *positivo y cuyas raíces son:*

$$x^2 - 4x + +2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

El signo de $f''(x)$ *será:*



Luego en $x = 2 - \sqrt{2}$ *y* $x = 2 + \sqrt{2}$ *hay puntos de inflexión porque en ellos la segunda derivada cambia de signo.*

e) Por los cálculos realizados en los apartados anteriores, de la curva $y = x^2\ e^{-x}$ *conocemos: dominio, imagen, monotonía y extremos relativos. Para completar su representación obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su asíntotas.*

Puntos de corte:

Para $x = 0$ *(calculado en el apartado b))* $y = 0 \ \rightarrow \ (0\ ,\ 0)$

$$Para \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2\ e^{-x} \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ e^{-x} = 0,\ sin\ solución\ pues\ \ e^{-x} \neq 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad (0\ ,0)$$

Asíntotas:

Como el dominio de la función es $\Re$ *no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal:

$$\underset{x \to +\infty}{Lím}\left(x^2\ e^{-x}\right) = \underset{x \to +\infty}{Lím} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) (indeterminado).$$ *Como* e^x *es infinito de orden superior a* x^2 *entonces*

$$\underset{x \to +\infty}{Lím}\left(x^2\ e^{-x}\right) = 0$$

$$\underset{x \to -\infty}{Lím}\left(x^2\ e^{-x}\right) = (-\infty)^2\ e^{+\infty} = (+\infty)\ (+\infty) = (+\infty)$$

Luego $y = 0$ *es asíntota horizontal en* $+\infty$. *Como* $f(x) \geq 0$ *(visto en apartado a)) la posición de la curva respecto de la asíntota será:*

Con la información que tenemos de la curva, su representación gráfica será: