PROBLEMA B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto (0 , 9) al punto (x , y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. *(2 puntos)*

b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. *(2 puntos)*

c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. *(2 puntos)*

d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. *(4 puntos)*

Solución:

Veamos la representación gráfica del problema.

Representemos la parábola $2y = 36 - x^2$

$$y = \frac{36 - x^2}{2}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 18$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{36 - x^2}{2} = 0$$

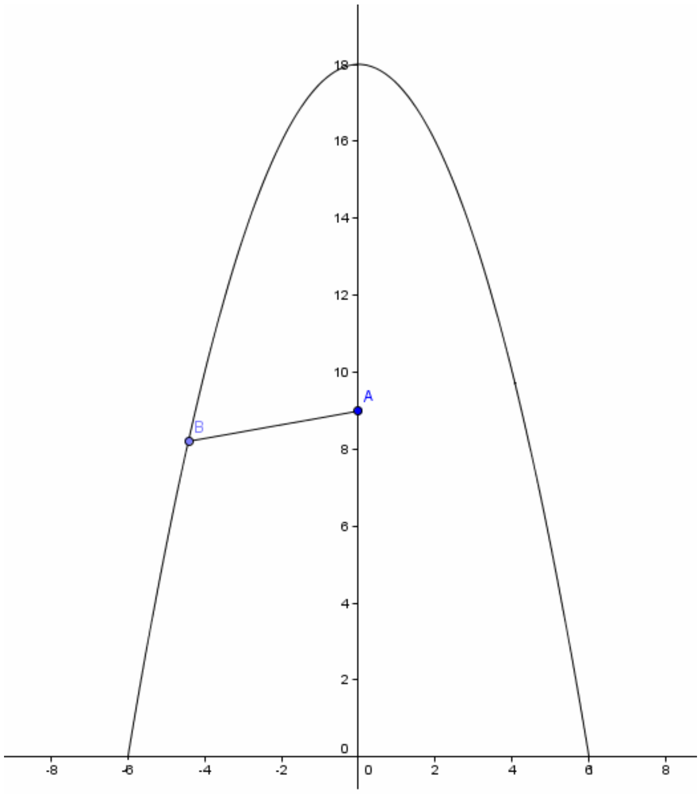
$$36 - x^2 = 0$$

$$36 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Como los puntos de corte con el eje OX son simétricos respecto del (0,0), el vértice de la parábola está en x = 0

El punto A es el (0 , 9) y el B uno cualquiera de la parábola.



a) $f(x) = d((0,9),(x,y))$ *siendo (x,y) un punto del arco de parábola* Γ*, luego* $y = \frac{36 - x^2}{2}$

$$f(x) = d((0,9),(x,y)) = d\left((0,9),\left(x, \frac{36 - x^2}{2}\right)\right) = \sqrt{(0-x)^2 + \left(9 - \frac{36 - x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{18 - 36 + x^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2 - 18}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{x^4 - 32x^2 + 324}{4}} = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2}$$

Luego $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2} \quad x \in [-6, 6]$

Veamos como es el radicando, $x^4 - 32x^2 + 324 = (x^2)^2 - 2 \cdot 16 \cdot x^2 + 16^2 + 68 = (x^2 - 16)^2 + 68$

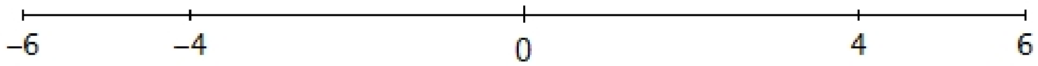
Por lo tanto $x^4 - 32x^2 + 324$ *es siempre positivo.*

b) Para buscar los mínimos relativos de f(x) estudiemos la monotonía de f(x). Debemos estudiar el digno de f´(x).

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{4x^3-64x}{2\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{4x^3-64x}{4\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}$$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=0 \;\rightarrow\; x^3-16x=0 \;\rightarrow\; x(x^2-16)=0\left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-16=0;\;\; x^2=16;\;\; x=\pm 4\end{array}\right.$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,

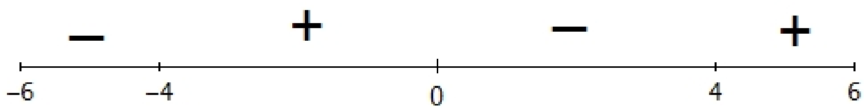


En f´(x) el denominador es la raíz cuadrada de una expresión que siempre es positiva (visto en el apartado anterior), luego no aporta signo a f´(x); por lo tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador, $x^3 - 16\,x$, polinomio de tercer grado con tres raíces reales (0 , – 4 y 4), esto quiere decir que en los intervalos indicados el signo del polinomio va alternando.

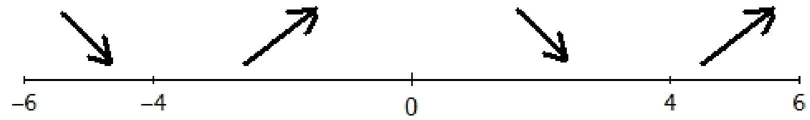
Veamos su signo, por ejemplo, para x = 1

x = 1 → $1^3 - 16\,.\,1 = 1 - 16 = -15 < 0$

luego:



y la monotonía será:



Es decir que f(x) tiene dos mínimos relativos en x = – 4 y en x = 4.

Y los puntos del arco Γ correspondientes son:

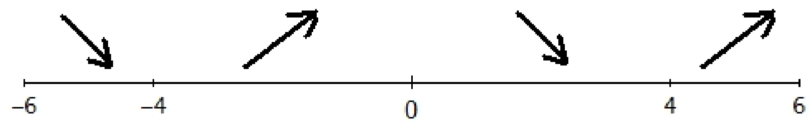
$$x=-4 \;\rightarrow\; y=\frac{36-(-4)^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

$$x=4 \;\rightarrow\; y=\frac{36-4^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

Finalmente, los puntos del arco Γ donde la distancia f(x) tiene mínimos relativos son (– 4 , 10) y (4 , 10)

c) Valores máximo y mínimo de f(x).

Según lo estudiado en el apartado anterior f(x) cumple, en relación a su crecimiento y decrecimiento,



Además, f(x) es una función continua definida en un intervalo cerrado. Luego sus extremos absolutos se alcanzarán en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Veámoslo:

Mínimos relativos de f(x):

$$x=-4 \;\rightarrow\; f(-4)=\frac{\sqrt{(-4)^4-32\,.\,(-4)^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{68}}{2}=\frac{2\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}\approx 4'1231$$

$$x=4 \;\rightarrow\; f(4)=\frac{\sqrt{4^4-32\,.\,4^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{68}}{2}=\frac{2\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}\approx 4'1231$$

Máximo relativo de f(x): $x=-0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{\sqrt{0^4-32\,.\,0^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{324}}{2}=\frac{18}{2}=9$

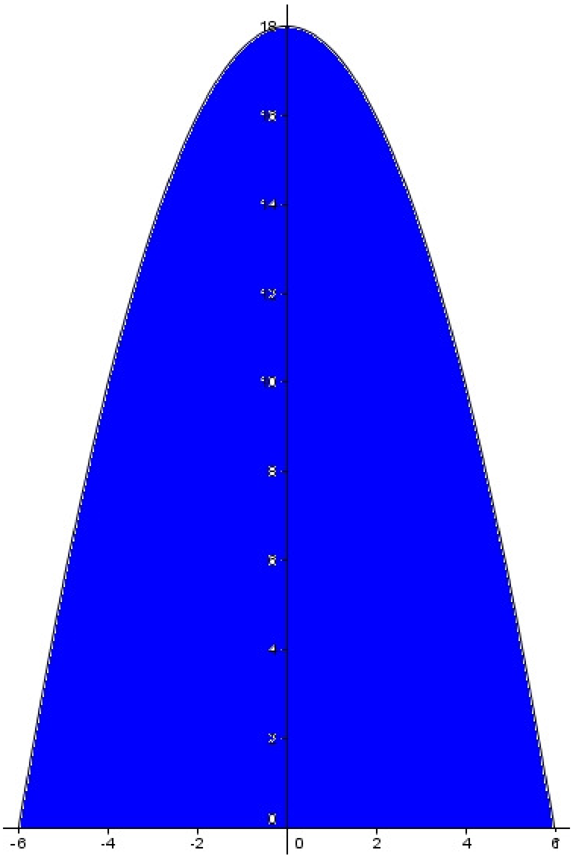
Extremos el intervalo:

$$x=-6 \;\rightarrow\; f(-4)=\frac{\sqrt{(-6)^4-32\,.\,(-6)^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{468}}{2}=\frac{2\sqrt{117}}{2}=\sqrt{117}\approx 10'8167$$

$$x=6 \;\rightarrow\; f(4)=\frac{\sqrt{6^4-32\,.\,6^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{468}}{2}=\frac{2\sqrt{117}}{2}=\sqrt{117}\approx 10'8167$$

Y finalmente, el valor máximo de f(x) es $\sqrt{117}$ y el mínimo es $\sqrt{17}$.

d) El área a calcular es:



Este área la calculamos mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-6}^{6}\left(\frac{36-x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-6}^{6}\left(36-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left[36x-\frac{x^3}{3}\right]_{-6}^{6}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(36\,.\,6-\frac{6^3}{3}\right)-\left(36\,.\,(-6)-\frac{(-6)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[216-\frac{216}{3}+216-\frac{216}{3}\right]=\frac{1}{2}\left[432-\frac{432}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1296-432}{3}=\frac{1}{2}\,\frac{864}{3}=144$$

El área pedida mide 144 u^2.