PROBLEMA A.3. Con el símbolo *ln x* se representa el logaritmo de un número positivo x cuando la base del logaritmo es el número e. Sea f la función que para un número positivo x está definida por la igualdad

$$f(x) = 4\ x\ ln\ x.$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo. *(4 puntos)*

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4\ x\ ln\ x$ en el punto (1,0). *(3 puntos)*

c) El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4\ x\ ln\ x$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Mínimo relativo de f(x)

Primero obtengamos el dominio de f(x).

Como ln x sólo puede calcularse para valores de $x > 0$, $Dom\ f(x) = (\ 0\ ,\ +\infty\ )$

$$f'(x) = 4\ \ln x + 4\ x\ \frac{1}{x} = 4\ \ln x + 4$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4\ \ln x + 4 = 0$$

$$4\ \ln x = -4$$

$$\ln x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo,

$$f''(x) = 4\ \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$Para \quad x = \frac{1}{e} \quad \rightarrow \quad f''(x) = \frac{4}{1/e} = 4\ e > 0 \quad \Rightarrow \quad mínimo$$

La función f(x) alcanza el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

b) Recta tangente a $y = 4\ x\ ln\ x$ *en* $(\ 1\ ,\ 0\ )$

Para $x = 1$, $y = 4\ .\ 1\ .\ ln\ 1 = 0$, *el punto* $(\ 1\ ,\ 0\ )$ *es de la curva.*

De la recta pedida, un punto es $(\ 1\ ,\ 0\ )$ *y la pendiente será* $y'_{x=1}$.

$y' = 4\ ln\ x + 4$ *(según hemos obtenido en el apartado anterior al calcular f´(x))*

$$y'_{x=1} = 4\ \ln 1 + 4 = 4$$

Por lo tanto, la recta tangente será:

$y - 0 = 4\ (\ x - 1\ )$; $\boldsymbol{y = 4\ x - 4}$

c) Área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ *y* $x = e^2$ *y la curva* $y = 4\ x\ ln\ x$.

Para obtener esta área es conveniente realizar la representación gráfica del problema.

En primer lugar representemos la curva $y = 4\ x\ ln\ x$,

Por cálculos de los apartados anteriores, de esta curva conocemos:

$Dom\ y = (\ 0\ ,\ +\infty\ )$

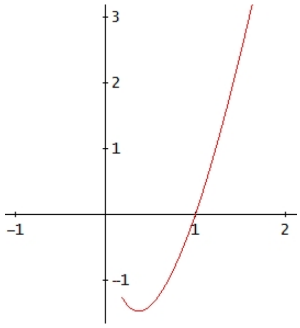
Su único extremo es el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e} \rightarrow y = 4\ \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-4}{e} \rightarrow \left(\frac{1}{e}, \frac{-4}{e}\right) \approx (0'368, -1'472)$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

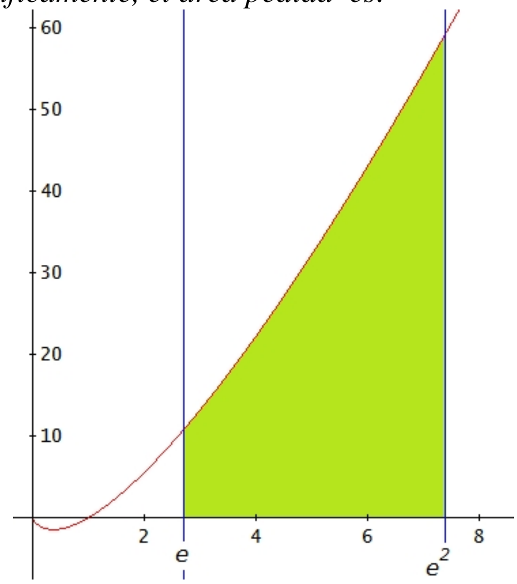
$x = 0$, *no es del dominio*

$$y = 0,\quad 4\ x\ ln\ x = 0 \left\langle \begin{matrix} 4x = 0 & \rightarrow & x = 0 \notin Dom\ y \\ \ln x = 0 & \rightarrow & x = 1 \end{matrix} \right. \quad \rightarrow \quad (1{,}0)$$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Para obtener la región del plano de la que debemos calcular su área nos falta por representar las rectas $x = e$ *y* $x = e^2$. *Tanto* e *como* e^2 *son mayores que 1, por lo que no necesitamos realizar más cálculos sobre la curva. Gráficamente, el área pedida es:*



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_e^{e^2} (4\,x \ln x)\, dx$$

Calculemos en primer lugar la integral indefinida.

$$\int (4\,x \ln x)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = 4x\, dx \quad \rightarrow \quad v = 2x^2 \end{array} \right\} = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= 2x^2 \ln x - \int 2x\, dx = 2x^2 \ln x - x^2$$

Por lo que,

$$\int_e^{e^2} (4\,x \ln x)\, dx = \left[2x^2 \ln x - x^2\right]_e^{e^2} = \left[2\left(e^2\right)^2 \ln e^2 - \left(e^2\right)^2\right] - \left[2\,e^2 \ln e - e^2\right] =$$

$$= \left(2\,e^4\ 2 \ln e - e^4\right) - \left(2\,e^2\ 1 - e^2\right) = 4\,e^4 - e^4 - \left(e^2\right) = 3e^4 - e^2 \approx 156´405394$$

Finalmente, el área pedida mide: $(\,3\,e^4 - e^2\,)$ *u.a.* $\approx$ *156´405394 u.a.*