PROBLEMA B.3. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Obtener **razonadamente**:

a) El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C. *(2 puntos).*

b) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima. *(3 puntos).*

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \le x \le 2$.

Obtener **razonadamente**:

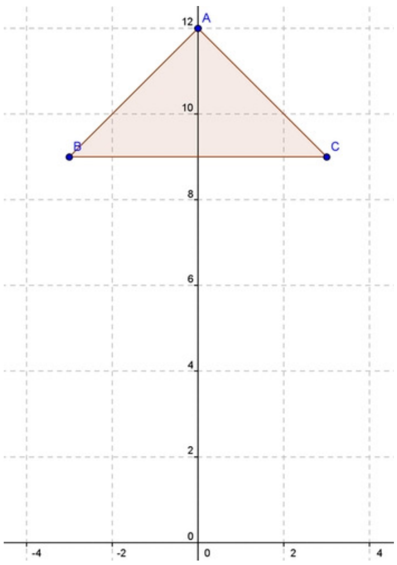
c) El área de la superficie S. (3 puntos).

d) El área total del escudo. (2 puntos).

Solución:

a) El triángulo T tiene de vértices los puntos $A(0, 12)$, $B(-x, x^2)$ y $C(x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Gráficamente será:



El triángulo T tiene de base $2x$ y de altura $12 - x^2$.
Luego su área será,

$$A_T(x) = \frac{2x(12 - x^2)}{2} = x(12 - x^2) = 12x - x^3$$

Por definición de los vértices B y C del triángulo T y como debe cumplirse que $x^2 < 12$, $\quad Dom\ A_T(x) = (0, \sqrt{12})$

Es decir: $A_T(x) = 12x - x^3$, $\quad Dom\ A_T(x) = (0, \sqrt{12})$

b) El área del triángulo T debe ser máxima.

$$A'_T(x) = 12 - 3x^2$$

$$12 - 3x^2 = 0$$

$$12 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = \pm 2$$

Pero como $Dom\ A_T(x) = (0, \sqrt{12})$, $x = 2$. Determinemos qué tipo de extremo es.

$A''_T(x) = -6x \quad \rightarrow \quad A''_T(2) = -6.2 = -12 < 0$, *luego en $x = 2$ hay un máximo relativo.*

Estudiemos la monotonía de $A_T(x)$ para comprobar que es el máximo absoluto.

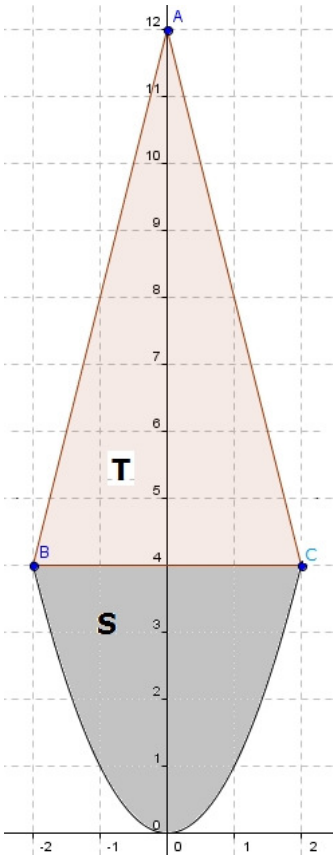
$A'_T(1) = 12 - 3.1^2 = 9 > 0 \quad$ *creciente*

$A'_T(3) = 12 - 3.3^2 = -15 < 0 \quad$ *decreciente*

Como a la izquierda de $x = 2$ $A_T(x)$ es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto.
Luego, el área del triángulo T es máxima para $x = 2$.

*Y finalmente, los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima son **B (– 2 , 4) y C (2 , 4)**.*

El escudo completo será:



c) Área de la superficie S

La recta que pasa por los puntos B y C es $y = 4$. Por lo tanto la superficie S está limitada por las funciones $y = 4$ e $y = x^2$ para $-2 \leq x \leq 2$. Su área podemos calcularla mediante la siguiente integral definida,

$$A_S = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

La superficie S mide $\frac{32}{3}$ u.a.

d) Para obtener el área total del escudo, calculemos el área del triángulo T máximo (para $x = 2$),

$A_T(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$, es decir, el área del triángulo máximo es de 16 u.a.

Obtengamos el área del escudo, $A_E = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48 + 32}{3} = \frac{80}{3}$ *u.a.*

***El área total del escudo es** $\frac{80}{3}$ u.a.*