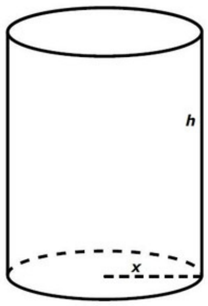
**PROBLEMA B.3.** Se desea construir un depósito cilíndrico de 100 $m^3$ de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del depósito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.
El precio del material de la base del depósito es 4 euros/$m^2$.
El precio del material de la pared vertical es 2 euros/$m^2$.
Obtener **razonadamente**:

a) El área de la base en función de su radio $x$ . *(1 punto).*
b) El área de la pared vertical del cilindro en función de $x$ . *(2 puntos).*
c) La función *f(x)* que da el coste del depósito. *(2 puntos).*
d) El valor $x$ del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo. *(5 puntos).*

*Solución:*




*a) Como la base del cilindro es un círculo, su área será* $A_b = \pi x^2$

*b) El área de la pared vertical del cilindro es el área lateral del cilindro:* $A_l = 2\pi x h$
*Para expresar este área en función de x, utilizamos la condición de que el volumen del depósito debe ser 100* $m^3$.
*El volumen del cilindro es:* $V_c = \pi x^2 h$, *por lo tanto* $\pi x^2 h = 100 \rightarrow h = \dfrac{100}{\pi x^2}$

*Y finalmente,* $A_l = 2\pi\, x\, h = 2\pi\, x \dfrac{100}{\pi x^2} = \dfrac{200}{x}$

*c) El coste del depósito será*

$$f(x) = 4\,.\,\pi x^2 + 2\,\frac{200}{x} = 4\pi x^2 + \frac{400}{x}$$

*Por definición* $x$ *es la longitud del radio de la base, luego* $x>0$

*La función que da el coste del depósito es:* $f(x) = 4\pi x^2 + \dfrac{400}{x}, \quad x>0$

*d) Mínimo de f(x)*

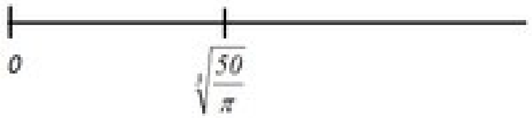
$$f'(x) = 8\pi x - \frac{400}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 8\pi x - \frac{400}{x^2} = 0$$

$$8\pi x^3 - 400 = 0$$

$$8\pi x^3 = 400 \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{400}{8\pi} = \frac{50}{\pi} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2'5154$$

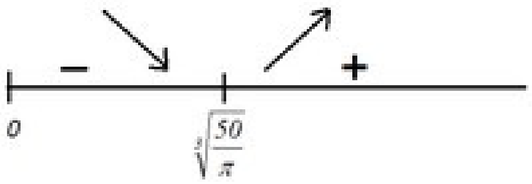
*Estudiemos el signo de* $f'(x)$ *a la izquierda y derecha de* $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$




$x = 1$ , $f'(1) = 8\pi - \frac{400}{1^2} = 8\pi - 400 = -397'4535$

$x = 3$ , $f'(3) = 8\pi\, 3 - \frac{400}{3^2} = 30'9538$

*Es decir,*




*Como a la izquierda de* $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ $f(x)$ *es decreciente y a la derecha creciente, en* $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ $f(x)$ *alcanza su mínimo absoluto.*

*Para* $x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \quad \rightarrow \quad f\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2 + \frac{400}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 238'5308 \approx 238'53$

***Para que el coste del depósito sea mínimo, el radio de la base debe medir*** $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ ***m*** $\approx$ ***2´5154 m y el coste será de 238´53 €.***