OPCIÓN A

PROBLEMA A.3. Se dan las funciones $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ y $g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) Las derivadas de *f(x)* y *g(x)*. *(4 puntos).*
b) Los dominios de definición de las funciones *f(x)* y *g(x)*. *(3 puntos).*
c) La expresión simplificada de la función *f(x) + g(x)*, *(1´5 puntos)*, y el recorrido de esta función *f(x) + g(x)*. *(1´5 puntos).*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Antes de derivar apliquemos propiedades de los logaritmos, $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right]=\frac{1}{1-x^2}$$

$g(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ *, apliquemos propiedades de los logaritmos,*

$$g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)-\ln(1+x)\right]$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{(1-x)(1+x)}\right]=\frac{-1}{1-x^2}$$

$$\boxed{\textit{Solución:}\quad f'(x)=\frac{1}{1-x^2}\quad y\quad g'(x)=\frac{-1}{1-x^2}}$$

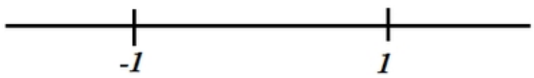
b) Dominio de $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

El argumento del logaritmo neperiano debe ser positivo, luego $\dfrac{1+x}{1-x}>0$

Estudiemos el signo del cociente,

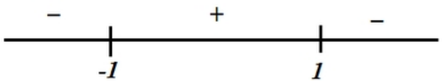
$1+x=0;\ x=-1;\qquad 1-x=0;\ x=1$

Debemos estudiar el signo del cociente en los intervalos:



$x=-2\ \rightarrow\ \dfrac{1+(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{-1}{3}<0$

$x=0\ \rightarrow\ \dfrac{1+0}{1-0}=\dfrac{1}{1}>0$ *Luego:*



Por tanto,
Dom f(x) = (– 1 , 1)
(intervalo abierto)

$x=2\ \rightarrow\ \dfrac{1+2}{1-2}=\dfrac{3}{-1}<0$

Dominio de $g(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

Como en la función anterior, $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} > 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1-x}{1+x} > 0$

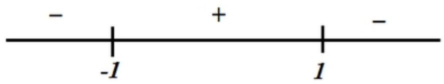
Estudiemos el signo del cociente,

Los intervalos a considerar son los mismos que en el estudio del dominio de f(x),

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1+(-2)}{1+(-2)} = \frac{3}{-1} < 0$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} > 0$$

Luego:



Por tanto,
Dom g(x) = (– 1 , 1)

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1-2}{1+2} = \frac{-1}{3} < 0$$

c)

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x) + \ln(1-x) - \ln(1+x)\right] = \frac{1}{2}0 = 0$$

Es decir, ***f(x) + g(x) = 0****, por lo tanto* ***el recorrido de f(x) + g(x) es { 0 }***