OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. En el plano *XY* está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, con $0 \le x \le 40$, siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.

Se pretende urbanizar un rectángulo R inscrito en la parcela A, de manera que los vértices de R sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) El área de la parcela A. *(3 puntos).*

b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. *(5 puntos).*

c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos).*

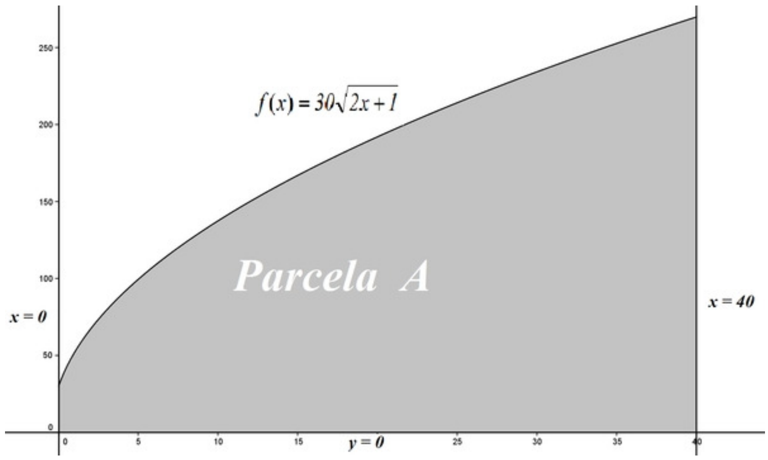
Solución:

Para representar la parcela A el dibujo de las rectas verticales $x = 0$ y $x = 40$ y de la recta horizontal $y = 0$ es sencillo. Efectuemos los cálculos necesarios para representar la función f(x),

$f(x) = 30\sqrt{2x+1}$

x	$f(x)$
0	$30\sqrt{2 \cdot 0+1} = 30\sqrt{1} = 30$
12	$30\sqrt{2 \cdot 12+1} = 30\sqrt{25} = 150$
40	$30\sqrt{2 \cdot 40+1} = 30\sqrt{81} = 270$

La representación gráfica de la parcela A será:



a) Obtendremos el área de la parcela A mediante el siguiente cálculo integral,

$$Área_A = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\, dx$$

Calculemos, previamente, la integral indefinida,

$$\int 30\sqrt{2x+1}\, dx = 30\int (2x+1)^{1/2} dx = 30\,\frac{1}{2}\int 2\,(2x+1)^{1/2} dx = 30\,\frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$$

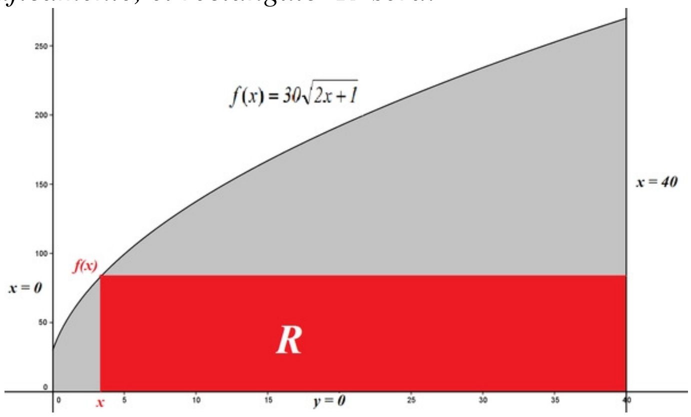
$$= 15\,\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 10(2x+1)^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{(2x+1)^3}$$

Por lo tanto $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx = \left[10\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^{40} = 10\sqrt{(2\,.\,40+1)^3} - 10\sqrt{(2\,.\,0+1)^3} =$

$= 10\sqrt{81^3} - 10\sqrt{1^3} = 10\,.\,81\sqrt{81} - 10 = 810\,.\,9 - 10 = 7280$

Finalmente, ***el área de la parcela A es de 7280 u^2.***

b) Gráficamente, el rectángulo R será:



Es un rectángulo de base (40 – x) y altura f(x).

El área de este rectángulo será: $A_R(x) = f(x)\,(40-x) = 30\sqrt{2x+1}\,(40-x)$

Obtengamos el máximo de A_R

$$A_R'(x) = 30\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}(40-x) + 30\sqrt{2x+1}\,(-1) = \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$$

$$A_R'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1} = 0 \quad\rightarrow\quad 30(40-x) - 30(2x+1) = 0 \quad\rightarrow\quad 40 - x - 2x - 1 = 0$$

$$39 - 3x = 0 \quad\rightarrow\quad 39 = 3x \quad\rightarrow\quad x = 13$$

Para determinar si x = 13 es máximo o mínimo estudiaremos el signo de $A_R'(x)$ *a la izquierda y derecha de 13,*

$$x = 10 \rightarrow \quad A_R'(10) = \frac{30(40-10)}{\sqrt{2\,.\,10+1}} - 30\sqrt{2\,.\,10+1} = \frac{900}{\sqrt{21}} - 30\sqrt{21} = \frac{900 - 30\,.\,21}{\sqrt{21}} = \frac{270}{\sqrt{21}} > 0$$

$$x = 20 \rightarrow \quad A_R'(20) = \frac{30(40-20)}{\sqrt{2\,.\,20+1}} - 30\sqrt{2\,.\,20+1} = \frac{300}{\sqrt{41}} - 30\sqrt{41} = \frac{300 - 30\,.\,41}{\sqrt{41}} = \frac{-930}{\sqrt{41}} < 0$$

Como a la izquierda de 13 la derivada es positiva, la función A_R *es creciente; a la derecha de 13 la derivada es negativa, la función* A_R *es decreciente. Por lo tanto en x = 13 hay un máximo que, además, es máximo absoluto porque la función pasa de creciente a decreciente.*

Obtengamos los vértices del rectángulo R para x = 13.

Sólo necesitamos calcular el valor de $f(13) = 30\sqrt{2\,.\,13+1} = 30\sqrt{27} = 30\,.\,3\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

Finalmente, ***los vértices del rectángulo R de área máxima son:***

(13 , 0), (13, $90\sqrt{3}$), (40 , $90\sqrt{3}$) y (40 , 0)

c) El valor del área máxima la obtenemos calculando $A_R(13)$.

$$A_R(13) = 30\sqrt{2\,.\,13+1}\,(40-13) = 30\sqrt{27}\;27 = 810\sqrt{27} = 810\,.\,3\sqrt{3} = 2430\sqrt{3}$$

El valor del área máxima es $2430\sqrt{3}$ u^2