Matemáticas II Junio 2013

OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x) = sen\ x$, para cualquier valor real, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razona-miento utilizado**:

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa $x = \pi/6$. *(4 puntos)*

b) La ecuación de la recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto de abcisa $x = \pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por ese punto y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto P. *(3 puntos)*

c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b). *(3 puntos)*

Solución:

a) Recta tangente a $y = sen\ x$ en $x = \pi/6$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad y = sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{punto de la recta } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y' = cos\ x \quad \rightarrow \quad m = y'_{x=\frac{\pi}{6}} = cos\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La ecuación de la recta tangente pedida será: $y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}}$$

b) Recta normal a $y = sen\ x$ en $x = \pi/3$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \rightarrow \quad y = sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{punto de la recta } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Pendiente de la recta tangente, $y' = cos\ x \quad \rightarrow \quad m_{r.t.} = y'_{x=\frac{\pi}{3}} = cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Como la recta tangente y la recta normal son perpendiculares, se cumple $m_{r.t.}\ m_{r.n.} = -1$, *luego*

$$\frac{1}{2} m_{r.n.} = -1 \quad \rightarrow \quad m_{r.n.} = -2$$

La ecuación de la recta normal pedida será: $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{y = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c) En el apartado a) hemos obtenido la recta $r: y = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{v_r} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

En el apartado b) hemos obtenido la recta $s: y = -2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \vec{v_s} = (-2, 1)$

Llamando α al ángulo que forman las rectas r y s,

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|\left|\vec{v_s}\right|} = \frac{\left|\left(1\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1,-2)\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}\,\sqrt{1+4}} = \left(como\ \sqrt{3}>1\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{\frac{7}{4}}\,\sqrt{5}} = 0{,}247478\ldots$$

Y, finalmente $\alpha = 75'6717^{o}$