PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\ sen\, x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en x = 0. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x + 1)e^{2x}$. *(3 puntos)*

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$, *(2 puntos)* y el área limitada por la curva $y = (x + 1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

a) m? / f(x) es continua en x = 0

Condiciones para que f(x) sea continua en x = 0.

1) ¿Existe f(0)?

$f(0) = m\,(0+1)\,e^{2\cdot 0} = m\,e^0 = m\,.\,1 = m.$ *Existe* $f(0) = m$

2) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *?*

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *como a la izquierda y derecha de 0 la función f(x) tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(m(x+1)e^{2x}\right)=m(0+1)e^{2.0}=m$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\ sen\,x}{x}=\frac{(0+1)\ sen\,0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ *(resolvemos la indeterminación aplicando la Regla de L´Hopital)* $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x+(x+1)\cos x}{1}=sen\,0+(0+1)\cos 0=1$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto m = 1.*

3) Para este valor de m se cumple la tercera condición de continuidad: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Luego, ***f(x) es continua en x = 0 para m = 1***.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = (x + 1)\,e^{2x}$

En primer lugar, $Dom\ y = \Re$

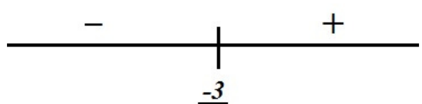
Calculemos y´

$$y' = e^{2x}+(x+1)\,2\,e^{2x}=e^{2x}+(2x+2)\,e^{2x}=(1+2x+2)\,e^{2x}=(2x+3)\,e^{2x}$$

Estudiemos el signo de y´

$$(2x+3)e^{2x}=0\quad \begin{cases} 2x+3=0 \ \rightarrow\ x=\dfrac{-3}{2} \\ e^{2x}=0 \ \rightarrow\ \text{sin } solución \end{cases}$$

$\forall x\in\Re\ \ e^{2x}>0$, *luego el signo de y´ solo depende de (2 x + 3) que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y cuya raíz es* $\dfrac{-3}{2}$, *por lo tanto el signo de (2 x + 3) es:*



Y finalmente, $y = (x + 1)\,e^{2x}$ *es decreciente en* $\left(-\infty,\dfrac{-3}{2}\right)$ *y creciente en* $\left(\dfrac{-3}{2},+\infty\right)$.

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x+1 & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \rightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

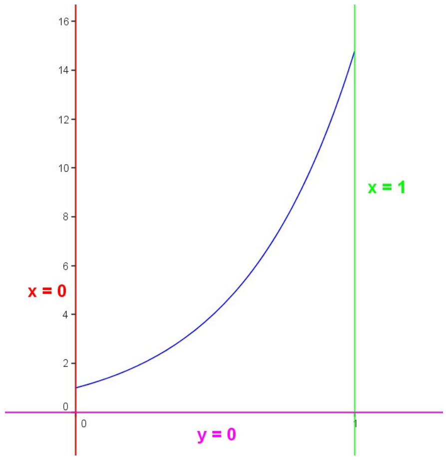
$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\;e^{2x} + C = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4}e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$$

Es decir, $\int (x+1)e^{2x}\,dx = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$

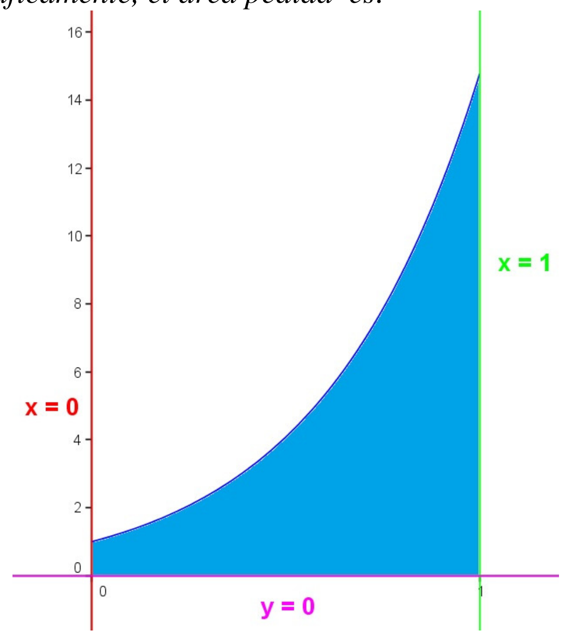
Para obtener el área limitada por la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *y las rectas* $x = 0$, $x = 1$ *e* $y = 0$ *es conveniente realizar la representación gráfica.*
En primer lugar representemos la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *que según lo estudiado en el apartado b) entre* $x = 0$ *y* $x = 1$ *es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:*

x	$y = (x+1)\,e^{2x}$
0	1
1	$2\,e^2 \approx 14'78$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x+1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{2.1+1}{4}e^{2.1} - \frac{2.0+1}{4}e^{2.0} =$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918\,u.a.$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)\,u.a. \approx 5'2918\,u.a.$