PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(4 puntos)*

c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas de f.

Dominio,

$$(x+1)^2=0 \quad\to\quad x+1=0 \quad\to\quad x=-1$$

Luego, $Dom\, f(x) = \Re-\{-1\}$.

Asíntotas,

Asíntotas verticales:

Posible $x=-1$,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\to\quad x=-1 \quad es \quad a.v.$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como el denominador es un polinomio de 2º grado y el numerador de 1}^{er}\text{ grado}\}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como en el límite anterior}\}=0$$

La asíntota horizontal es: $y=0$.

Por ser la función f un cociente de funciones polinómicas con el denominador de mayor grado que el numerador, no tiene asíntota oblicua.

Solución: Dom f(x) = $\Re-\{-1\}$***, asíntota vertical:*** $x=-1$ ***y asíntota horizontal:*** $y=0$.

b) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de f´(x).

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$Dom\, f(x) = \Re-\{-1\}$

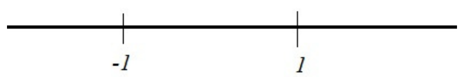
$$f'(x)=\frac{1.(x+1)^2-x.2.(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}=\frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4}=\frac{-x^2+1}{(x+1)^4}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador:

$-x^2+1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm 1$

$(x+1)^4=0;\quad x+1=0;\quad x=-1$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos:



En f´(x) el denominador está elevado a la cuarta, será positivo; luego el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces –1 y 1. Por tanto, el signo de f´(x) será:*

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$-$		$+$		$-$

Por tanto, ***f(x) es creciente en (– 1 , 1) y decreciente en (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞).***

c) Cálculo de $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx.$

Es una integral racional, descomponemos el integrando:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} == \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Por tanto, comparando los polinomios de los numeradores inicial y final, debe ser:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \rightarrow \quad A = 1 \quad y \quad B = -1$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}dx =$$

Calculemos cada integral por separado:

$$\int \frac{1}{x+1}dx = Ln\,|x+1|$$

$$\int \frac{-1}{(x+1)^2}dx = \int -(x+1)^{-2}\,dx = \left\{\begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix}\right\} = \int -t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x+1}$$

Luego: $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = Ln\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$