PROBLEMA B.3. La diferencia de potencial x entre dos puntos de un circuito eléctrico provoca el paso de una corriente eléctrica de intensidad y, que está relacionada con la diferencia de potencial x por la ecuación $y = -x^2 - x + 6$, siendo $0 \le x \le 2$.

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$ *(3 puntos)*
y deducir, gráfica o analíticamente, el valor de la intensidad y cuando la diferencia de potencial x es 0 y el valor de la diferencia de potencial x al que corresponde una intensidad y igual a 0, siendo $0 \le x \le 2$. *(1 punto)*

b) El valor de la diferencia de potencial x para el que es máximo el producto $y \cdot x$ de la intensidad y por la diferencia de potencial x, cuando $0 \le x \le 2$, *(2 puntos)*
y obtener el valor máximo de dicho producto $y \cdot x$, cuando $0 \le x \le 2$, *(1 punto)*

c) El área de la superficie situada en el primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. *(2 puntos)*

Solución:

a) Gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$.

$f(x)$ es una parábola.

Puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$$

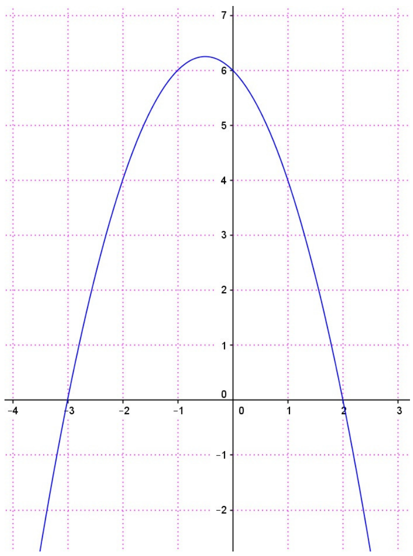
$$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 - x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} =$$

$$= \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{6}{-2} = -3 & \rightarrow (-3, 0) \\ \dfrac{1-5}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 & \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-1)}{2(-1)} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) + 6 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4} = 6'25 \quad \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, \frac{25}{4}\right)$$

Por tanto la gráfica de $f(x) = -x^2 - x + 6$ es:



*Cuando la **diferencia de potencial es 0** ($x = 0$), según cálculos anteriores, la **intensidad es de 6**.*

*Para una **intensidad 0** ($y = 0$), según cálculos anteriores, la **diferencia de potencial** ($x / 0 \le x \le 2$) es **2**.*

b) ¿x? / y . x es máximo ($0 \le x \le 2$)

$P = y \cdot x = (-x^2 - x + 6) \cdot x = -x^3 - x^2 + 6x$

Busquemos extremos relativos.

$P' = -3x^2 - 2x + 6$

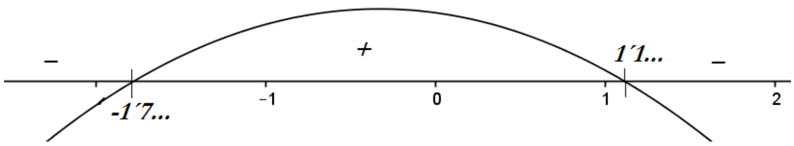
$-3x^2 - 2x + 6 = 0$

$3x^2 + 2x - 6 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3} = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1126 \\ \dfrac{-1-\sqrt{19}}{3} \cong -1'7863 \end{cases}$$

Signo de P':

Considerando que P' es, gráficamente, una parábola con coeficiente de x^2 negativo y corta al eje OX para $x = -1'7\ldots$ y $x = 1'1\ldots$,



P es una función que está definida en el intervalo [0 , 2].

A la izquierda de $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1196$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, luego para $x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$ la función P alcanza su máximo absoluto.

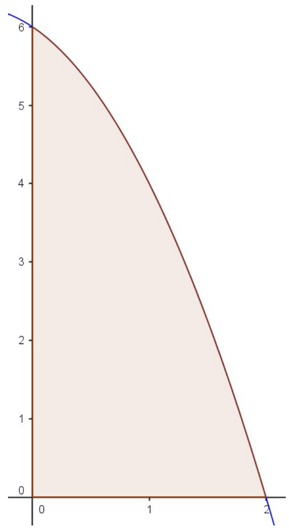
Por tanto, para una diferencia de potencial de $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \cong 1'1196$ el producto y . x es máximo.

Y para

$$x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \quad \rightarrow \quad y \cdot x = P = -\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \frac{-1+\sqrt{19}}{3} = \frac{-56+38\sqrt{19}}{27} \cong 4'0607$$

c)

El área pedida es:



La calculamos mediante la siguiente integral:

$$\int_0^2 \left(-x^2 - x + 6\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2\right) - 0 =$$

$$= -\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 12 = -\frac{8}{3} - 2 + 12 = -\frac{8}{3} + 10 = \frac{22}{3}\, u^2 \cong 7'3333\, u^2$$