PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función f. *(2 puntos)*
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(3 puntos)*
c) La integral $\int f(x)\,dx$. *(3 puntos)*
d) El valor de a>4 para el que el área de la superficie limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y = 0*, *x = 4* y *x = a* es ln(3/2). *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Dominio,

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$x^2-5x+6=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{cases}$$

Por tanto, ***Dom f(x) =ℜ ~{ 2 , 3 }***

Asíntotas.

Asíntotas verticales,

Las posibles asíntotas verticales son x = 2 y x = 3. Comprobemos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{2^2-5.2+6}=\frac{1}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{3^2-5.3+6}=\frac{1}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=3 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{\infty}=0 \end{array}\right\}, \text{ por tanto } y=0 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{\infty}=0, \text{ por tanto no tiene asíntota oblicua.}$$

La función f tiene dos asíntotas verticales, x = 2 y x = 3, y una asíntota horizontal y = 0.

b) Monotonía de la función f.

Estudiemos el signo de f´(x).

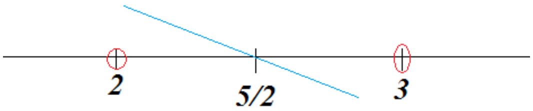
$$f'(x)=\frac{-(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}=\frac{-2x+5}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

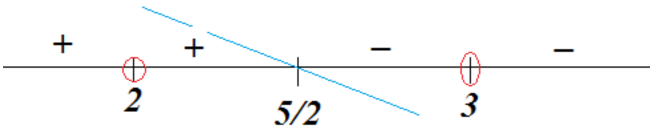
$$-2x+5=0 \quad \rightarrow \quad -2x=-5 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

$$\left(x^2-5x+6\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-5x+6=0 \quad \rightarrow \quad \{resuelta\ en\ a)\}\left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Como en f´(x) el denominador es un término al cuadrado, es positivo. Luego el signo de f´ depende del numerador que, gráficamente, es una recta de pendiente negativa que pasa por (5/2 , 0), por lo que:



El signo de f´ es:



Finalmente, ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty, 2\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup \left(3, +\infty\right)$.

c) $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx \overset{*}{=}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)\,(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)\,(x-3)} \quad \rightarrow \quad 1=A(x-3)+B(x-2)$$

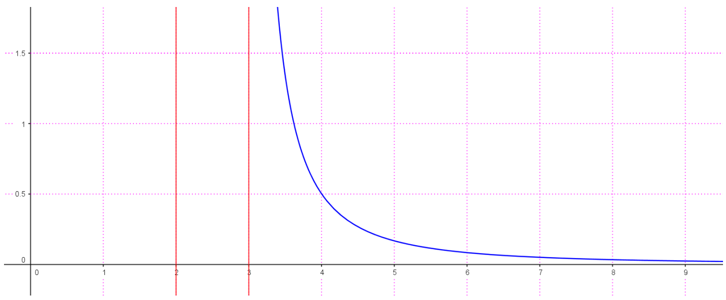
$$\begin{array}{l} Para\ \ x=3 \ \rightarrow\ 1=B \\ Para\ \ x=2 \ \rightarrow\ 1=-A \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} A=-1 \\ B=1 \end{array}$$

$$\overset{*}{=}\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-Ln\left|x-2\right|+Ln\left|x-3\right|+C=Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

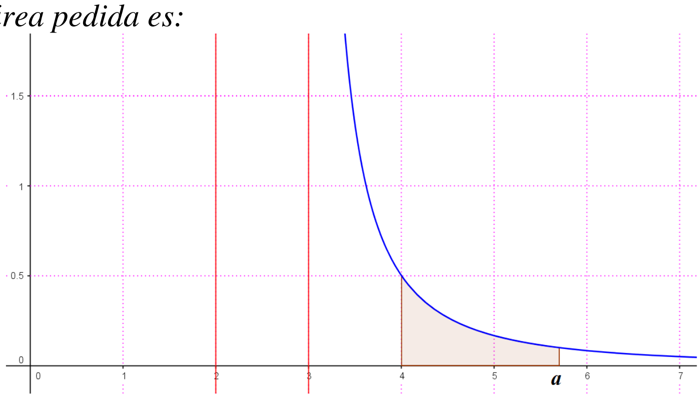
d) *¿a? / a>4 y el área de la superficie limitada por y = f(x) y las rectas y = 0, x = 4 y x = a es ln(3/2).*

Para determinar el área a calcular representemos la función f(x), para x ≥ 4, a partir de la información obtenida en los apartados a) y b) y algún punto de la función, por ejemplo,

$$x=4, \quad f(4)=\frac{1}{4^2-5.4+6}=\frac{1}{2}.$$



El área pedida es:



Para calcular este área realizamos la siguiente integral definida:

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$$

Considerando la integral indefinida obtenida el apartado c,

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx=\left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_4^a=$$

$$= \left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \right]_4^a = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{1}{2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2}$$

Como el área debe ser Ln(3/2), entonces:

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2} = Ln\frac{3}{2}$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \left(Ln\frac{3}{2} \right) + \left(Ln\frac{1}{2} \right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{4} \right) \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \frac{3}{4} \quad \begin{cases} \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = 3a-6 \quad \rightarrow \quad a = 6 \\[2ex] \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = -3a+6 \quad \rightarrow \quad 7a = 18 \\[2ex] \qquad\qquad\qquad a = \dfrac{18}{7} = 2´5\ldots < 4 \end{cases}$$

Como a debe ser mayor que 4, ***la solución es a = 6****.*