PROBLEMA B.3. Cada día, una planta productora de acero vende x toneladas de acero de baja calidad e y toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y = \dfrac{23-5x}{10-x}$, siendo $0 < x < \dfrac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de x. *(3 puntos)*

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. *(5 puntos)*

c) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. *(2 puntos)*

Solución:

Datos: x *toneladas de acero de baja calidad a 300€/T.*
y *toneladas de acero de alta calidad a 900€/T.*

$$y = \frac{23-5x}{10-x},\ 0 < x < \frac{23}{5} = 4'6.$$

a) ¿Ingresos en función de x?

$$I(x) = 300x + 900\,\frac{23-5x}{10-x} \qquad 0 < x < \frac{23}{5}$$

b) ¿Ingresos máximo?

Tenemos que estudiar $I'(x)$

$$I'(x) = 300 + 900\,\frac{-5(10-x)-(23-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 300 + 900\,\frac{-50+5x+23-5x}{(10-x)^2} = 300 + 900\,\frac{-27}{(10-x)^2} =$$

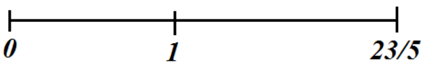
$$= 300 - \frac{24300}{(10x)^2}$$

Estudiemos el signo de I´,

$$300 - \frac{24300}{(10-x)^2} = 0 \;\rightarrow\; 300 = \frac{24300}{(10-x)^2} \;\rightarrow\; (10-x)^2 = \frac{24300}{300} \;\rightarrow\; (10-x)^2 = 81 \;\rightarrow$$

$$10-x = \pm\sqrt{81} \;\rightarrow\; 10-x = \pm 9 \;\begin{cases} 10-x = 9 \;\rightarrow\; x = 1 \\ 10-x = -9 \;\rightarrow\; x = 19,\ 19 > \dfrac{23}{5} \quad 19 \notin Dom\, I(x) \end{cases}$$

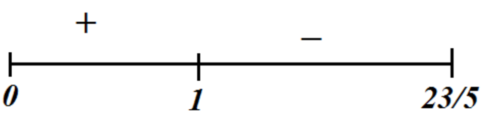
Luego, debemos estudiar el signo de I´ en los siguientes intervalos:



Para $x = 0'5$ $\;I'(0'5) = 300 - \dfrac{24300}{(10-0'5)^2} = +$

Para $x = 2$ $\;I'(2) = 300 - \dfrac{24300}{(10-2)^2} = -$

entonces:



Luego, I(x) es creciente en (0 , 1) y decreciente en $\left(1, \dfrac{23}{5}\right)$*. En x = 1 hay un máximo relativo. Ahora bien, a la izquierda de x = 1 la función es creciente y a la derecha decreciente entonces en x = 1 hay un máximo absoluto.*

Para $x = 1$, $y = \dfrac{23 - 5\,.\,1}{10 - 1} = \dfrac{18}{9} = 2$

Finalmente, ***para que los ingresos de ese día sean máximos se debe vender 1 tonelada de acero de baja calidad y 2 toneladas de acero de alta calidad.***

c) ¿Ingreso máximo?

Del apartado anterior, el ingreso máximo se obtiene para x= 1 e y =2, por tanto

$I(1) = 300\,.\,1 + 900\,.\,2 = 2100$

Solución: el ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día es de 2100€.