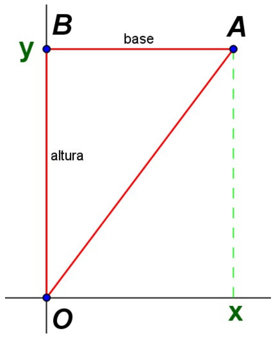
PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. *(3 puntos)*
b) El valor de x para el que dicha área es máxima. *(5 puntos)*
c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*

Solución:
a) ¿ A_T ?

La representación gráfica del triángulo T es:



$$A_T = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{x\,y}{2}$$

Como debemos expresar el área en función de x hay que buscar una relación entre x e y.
Del enunciado sabemos que d (O , A) + d (A , B) = 30 m. Por tanto:

$\sqrt{x^2+y^2} + x = 30$, *despejemos y,*

$$\sqrt{x^2+y^2} = 30 - x \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (30-x)^2 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2 = 900 - 60x + x^2$$

$$y^2 = 900 - 60x \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{900-60x} \qquad (y > 0)$$

Para que se pueda calcular el valor de y debe ser $900 - 60\,x > 0 \;\rightarrow\; 60\,x < 900 \;\rightarrow\; x < 15$
Según el enunciado del problema $x > 0$.

Por tanto, $A_T = \dfrac{x\sqrt{900-60x}}{2}, \quad 0 < x < 15$

b) ¿x? / área es máxima

$$A_T' = \frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{900-60x} + x\,\frac{-60}{2\sqrt{900-60x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}}\right)$$

$$A_T' = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}} = 0 \quad \rightarrow \quad 900 - 60x - 30x = 0$$

$$900 - 90x = 0 \quad \rightarrow \quad 900 = 90x \quad \rightarrow \quad x = 10$$

Estudiemos el signo de A_T' en el intervalo (0 , 15)

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad A_T' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60\,.\,1} - \frac{30\,.\,1}{\sqrt{900-60\,.\,1}}\right) = 11'75.. > 0$$

$$x = 11 \quad \rightarrow \quad A_T' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60\,.\,11} - \frac{30\,.\,11}{\sqrt{900-60\,.\,11}}\right) = -2'90.. < 0$$

Por lo que:

Por lo tanto en $x = 10$ hay un máximo relativo que además es el absoluto porque la función a la izquierda de 10 es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: para que el área sea máxima x = 10.

c) Para $x = 10$ el valor del área es:

$$A_T(10) = \frac{10\sqrt{900-60\cdot 10}}{2} = 86{\acute{}}6025\ m^2$$

Solución: el valor de dicha área máxima es 86´6025 m²