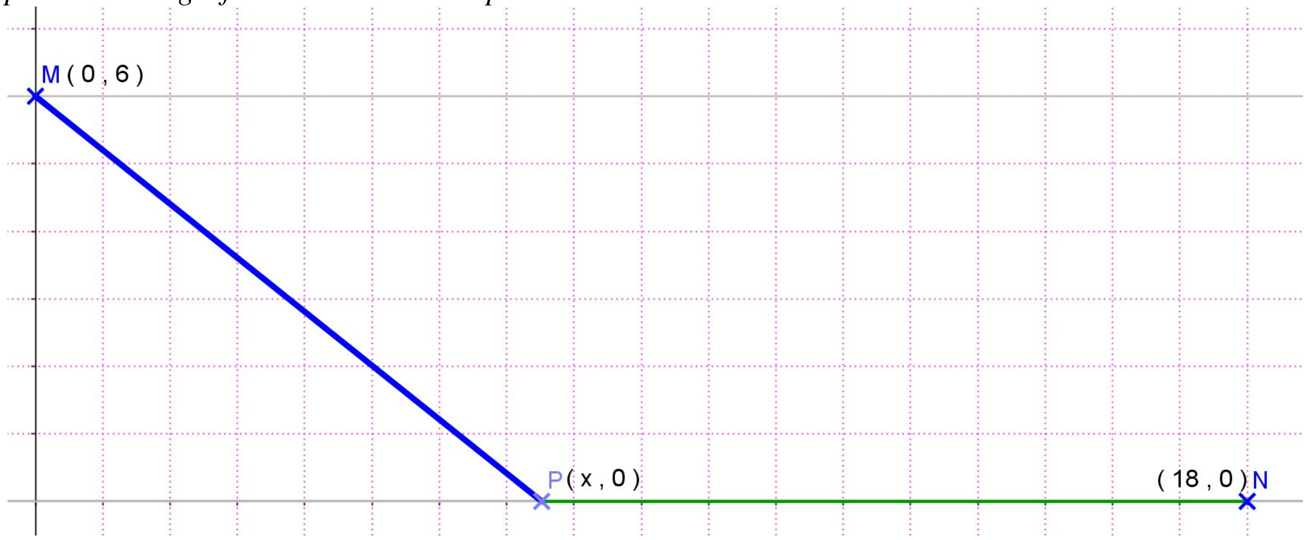
PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable MP tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable PN es de 5 €/m.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El costo total C de los dos cables en función de la abcisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. *(3 puntos)*

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. *(4 puntos)*

c) El valor de dicho costo total mínimo. *(3 puntos)*

Solución:
La representación gráfica de los datos del problema es:



a) Coste de los dos cables en función del valor x del punto P.
Sabemos que $0 \le x \le 18$,

$$d(M,P)=\sqrt{(x-0)^2+(0-6)^2}=\sqrt{x^2+36}$$

$$d(P,N)=18-x$$

Por lo que el coste C de los cables será: $C = 10\sqrt{x^2+36}+5(18-x) \qquad 0 \le x \le 18$

b) Mínimo de C.

$$C' = 10\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}}-5=\frac{10x}{\sqrt{x^2+36}}-5$$

$$C'=0 \;\rightarrow\; \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}}-5=0 \;\rightarrow\; 10x-5\sqrt{x^2+36}=0 \;\rightarrow\; 10x=5\sqrt{x^2+36}$$

$$(10x)^2=\left(5\sqrt{x^2+36}\right)^2 \;\rightarrow\; 100\,x^2=25(x^2+36) \;\rightarrow\; 100\,x^2=25\,x^2+900$$

$$100\,x^2-25\,x^2=900 \;\rightarrow\; 75\,x^2=900 \;\rightarrow\; x^2=\frac{900}{75} \;\rightarrow\; x^2=12 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{12}$$

Pero como $0 \le x \le 18$*, entonces* $x=\sqrt{12}\approx 3'4641$

Para determinar si es mínimo calculemos los valores de C´ a la izquierda y derecha de $\sqrt{12}$

$$x = 1, \quad C' = \frac{10\,.\,1}{\sqrt{1^2 + 36}} - 5 = \frac{10}{\sqrt{37}} - 5 = -3'3560 < 0$$

$$x = 5, \quad C' = \frac{10\,.\,5}{\sqrt{5^2 + 36}} - 5 = \frac{50}{\sqrt{61}} - 5 = 1'4018 > 0$$

Hemos obtenido que a la izquierda de $\sqrt{12}$ *C´ es negativa y a la derecha positiva, por lo que para x =* $\sqrt{12}$ *la función C tiene un mínimo relativo que además es el absoluto porque C es decreciente a la izquierda de* $\sqrt{12}$ *y creciente a la derecha.*

Por tanto, ***el coste total C es mínimo para x =*** $\sqrt{12}$ ***m ≈3´4641 m.***

c) El valor del coste total mínimo será:

$$C = 10\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 10\sqrt{12 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 141'9615$$

Por lo que, ***el coste total mínimo es de 141´96 €.***