PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real x ≠ 0, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, *(2 puntos)* y los extremos relativos de la función f. *(1 punto)*

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. *(3 puntos)*

c) El área de la región plana limitada por la curva $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1\le x\le e$, el segmento que une los puntos (1,0) y (e,0), y las rectas $x = 1$ y $x = e$. *(4 puntos)*

Solución:

a) Monotonía de f(x).

Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = $\Re \sim \{ 0 \}$.

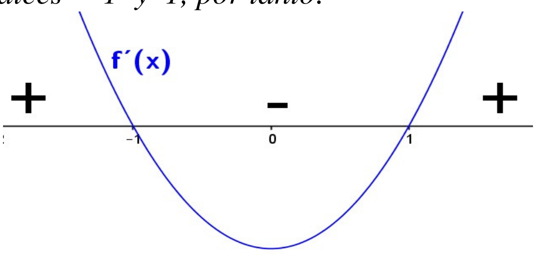
$$f'(x)=\frac{2x\,x-1\left(x^2+1\right)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

$$x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 *positivo y raíces – 1 y 1, por tanto:*



Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞) y decreciente en (– 1, 1).***

Del estudio anterior obtenemos que f(x) tiene un máximo relativo en x = – 1 y un mínimo relativo en x = 1.

$$Para \quad x=-1 \quad\rightarrow\quad f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$Para \quad x=1 \quad\rightarrow\quad f(1)=\frac{1^2+1}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Entonces, ***f(x) tiene un máximo relativo en (– 1 , – 2) y un mínimo relativo en (1 , 2).***

b) ¿Asíntotas de $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ *?*

Asíntota vertical,

Posible A.V. x = 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \quad es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty \quad\rightarrow\quad No\ tiene\ asíntota\ horizontal.$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y grad (numerador) – grad (denominador) = 2 – 1 = 1 la función tiene asíntota oblicua y la obtenemos efectuando la división polinómica:

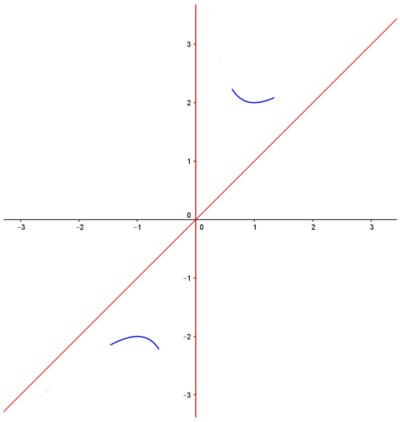
$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \underline{-x^2} & x \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad y = x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Finalmente, ***la curva tiene x = 0 como asíntota vertical e y = x como asíntota oblicua.***

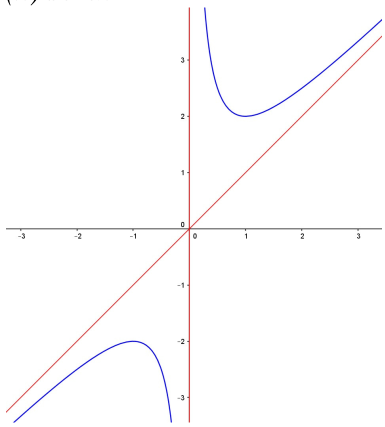
c) ¿Área de la región plana?

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función f(x),

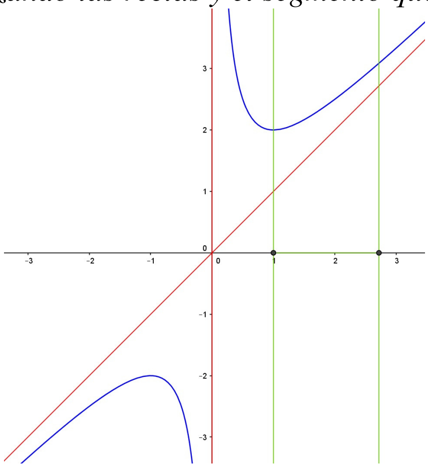
Sabemos



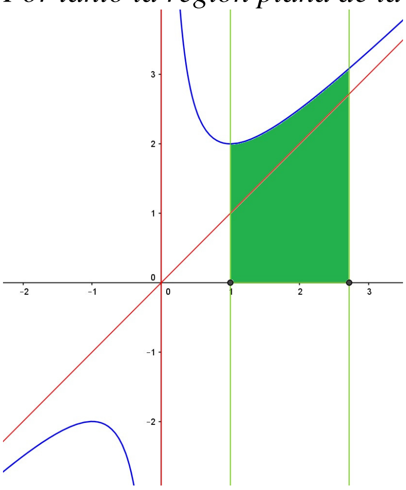
Por tanto, f(x) será:



Trazando las rectas y el segmento que delimitan la región:



Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + Ln\,|x| + C$$

Luego, $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2} + Ln\,|x|\right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + Ln\,|e|\right) - \left(\frac{1^2}{2} + Ln\,|1|\right) =$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \approx 4´1945$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\right)u^2 \approx$ **4´1945 u²**.