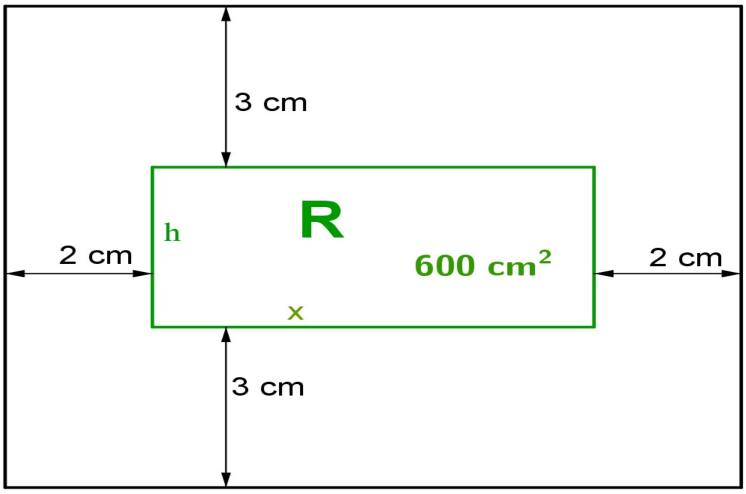
PROBLEMA B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R. *(3 puntos)*
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima. *(5 puntos)*
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima. *(3 puntos)*

Solución:
La representación gráfica del ejercicio es:



a) Área de la cartulina en función de x (base de R).

$A_R = 600\ cm^2 \quad \rightarrow \quad x\,.\,h = 600 \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{600}{x}$ *(como x es la longitud de la base, x > 0)*

Entonces, las medidas de la cartulina son: base $= x + 4$ y altura $= \dfrac{600}{x} + 6$

El área de la cartulina será: $(x+4)\left(\dfrac{600}{x}+6\right) = 600 + 6x + \dfrac{2400}{x} + 24 = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}$

Solución: $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

b) ¿x? / $A_{cartulina}$ sea mínima.

Por el apartado (a) sabemos que $A_{cartulina} = 624 + 6x + \dfrac{2400}{x}, \quad x > 0$

Obtengamos el mínimo de esta función,

$$A'_{cartulina} = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

$$A'_{cartulina} = 0 \quad \rightarrow \quad 6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 2400 = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 = 2400 \quad \rightarrow \quad x^2 = 400$$

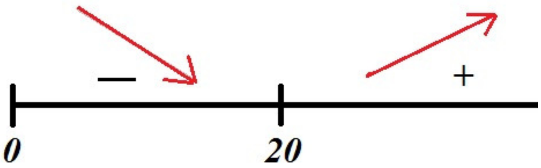
$$x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

Como x > 0, entonces x = 20

Para determinar si para este valor de x el área es mínima, estudiemos la monotonía de $A_{cartulina}$
Hay que estudiar el signo de $A'_{cartulina}$ *en los intervalos* $(0, 20)$ *y* $(20, +\infty)$

x	A_c'
1	$6-\dfrac{2400}{1^2}=-2394<0$
21	$6-\dfrac{2400}{21^2}=0'55..>0$

Por tanto:



Luego, en $x = 20$ se alcanza el mínimo relativo que, además, es el mínimo absoluto ya que la función A_c es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.

Solución: el área de la cartulina es mínima para $x = 20$ cm.

c) Dimensiones de dicha cartulina.

Para $x = 20$, (según calculamos en el apartado (a)) las dimensiones de la cartulina son:

base $= 20 + 4 = 24$ *cm* *y* *altura* $= \dfrac{600}{20}+6 = 36$ *cm*

Solución: las dimensiones de la cartulina de área mínima pedida son 24 cm de ancho y 36 cm de alto.