PROBLEMA A.3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ se pide obtener, **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(2 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, *(4 puntos)*

c) El área limitada por la curva y = f(x), el eje de abcisas y las rectas x = 2 y x = 3. *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio de f(x)

$$x^2-x=0 \;\rightarrow\; x(x-1)=0 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \end{array} \right\} \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntota vertical,

Posibles A.V. $x=0$ *y* $x=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=0 \;\; es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \;\; es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{\infty}=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\; \text{es la asíntota horizontal.}$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y
grad (numerador) – grad (denominador) = 1 – 2 = – 1 ≠ 1
la función no tiene asíntota oblicua

Finalmente, ***Dom f(x) = ℜ ~{0, 1} y***
sus asíntotas son x = 0, x = 1 (asíntotas verticales) e y = 0 (asíntota horizontal).

b) Monotonía de f(x).

Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = ℜ ~{ 0, 1 }.

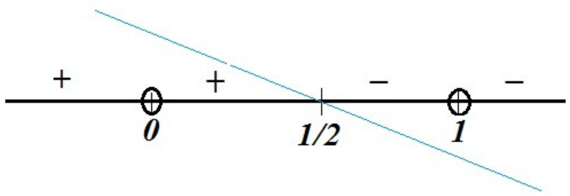
$$f'(x)=\frac{-1(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$-2x+1=0 \;\rightarrow\; 1=2x \;\rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

$$(x^2-x)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-x=0 \;\; (\text{resuelta en a})) \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right.$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 1/2, por tanto:

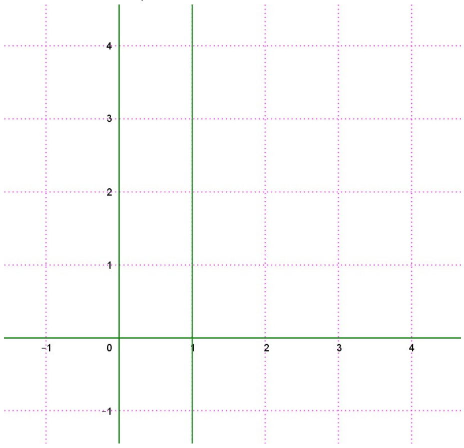


Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, 0) ∪(0 , ½) y decreciente en (½ , 1) ∪(1 , + ∞).***

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función f(x),

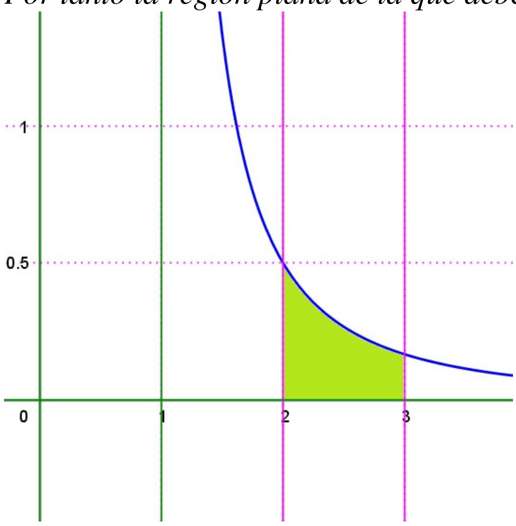
Conocemos sus asíntotas y su monotonía,



Como el área a calcular está limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 3$; la función es decreciente para $x > 1$ para representar el área basta con calcular la un par de valores de la función, por ejemplo:

x	$f(x)$
2	$\frac{1}{2^2-2} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3^2-3} = \frac{1}{6}$

Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx$$

Es una integral racional,

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x}$$

Luego $1 = A\,(x-1) + B\,x$

para $x = 0 \;\rightarrow\; 1 = A\,(0-1) + B\,.\,0 \;\rightarrow\; 1 = -A \;\rightarrow\; A = -1$

para $x = 1 \;\rightarrow\; 1 = A\,(1-1) + B\,.\,1 \;\rightarrow\; 1 = B \;\rightarrow\; B = 1$

Como la integral indefinida es para calcular la integral definida, no usamos la constante de integración,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = -Ln\,|x| + Ln\,|x-1|$$

Luego,

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx = \left[-Ln\,|x| + Ln\,|x-1|\right]_2^3 = \left(-Ln\,|3| + Ln\,|3-1|\right) - \left(-Ln\,|2| + Ln\,|2-1|\right) =$$

$$= \left(-Ln\,3 + Ln\,2\right) - \left(-Ln\,2 + Ln\,1\right) = -Ln\,3 + Ln\,2 + Ln\,2 - Ln\,1 = 2Ln\,2 - Ln\,3 - 0 =$$

$$= 2Ln\,2 - Ln\,3 \approx 0´2877$$

Solución: el valor del área pedida es $(2Ln\,2 - Ln\,3)\,u^2 \approx$ ***0´2877 u²***.