PROBLEMA B.3. un proyectil está unido al punto (0, 2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos (– 2, 0) y (2, 0).

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto (0, 2). *(2 puntos)*

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. *(4 puntos)*

Solución:

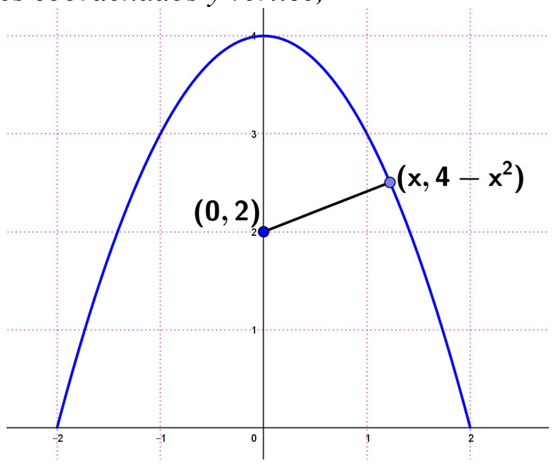
La representación gráfica del problema es:

$y = 4 - x^2$ *es una parábola, calculemos puntos de corte con ejes coordenados y vértice,*

$x = 0, \quad y = 4 \quad (0, 4)$

$$y=0, \quad 4-x^2=0, \quad 4=x^2, \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad \begin{cases}(-2,0)\\(2,0)\end{cases}$$

$$\text{Vértice} \quad x=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2(-1)}=0 \qquad (0,4)$$



a) $$d\left((0,2),\left(x,4-x^2\right)\right)=\sqrt{(x-0)^2+\left(4-x^2-2\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}=\sqrt{x^2+4-4x^2+x^4}=\sqrt{x^4-3x^2+4}$$

La función pedida es $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4} \quad -2\le x\le 2$

b) *Debemos buscar el máximo absoluto de la función anterior.*

$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4} \quad -2\le x\le 2$

Teniendo en cuenta que en el cálculo inicial de f(x) el radicando es la suma de dos términos al cuadrado, este radicando es siempre positivo.

Para encontrar el máximo absoluto de f(x) necesitamos obtener sus extremos relativos.

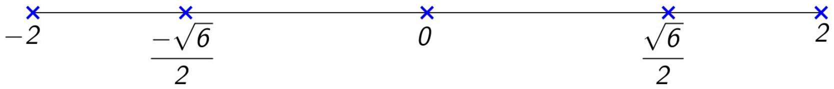
Considerando que si $h(x)=\sqrt{g(x)}$ *siendo* $g(x)>0$ *entonces como* $h'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, *entonces el signo de h´(x) coincide con el signo de g´(x). Es decir, para calcular los extremos relativos de h(x) basta con obtener los de g(x)*

Luego, los extremos relativos de f(x) son lo de $y = x^4 - 3x^2 + 4$. *Calculémoslos,*

$y=x^4-3x^2+4, \qquad y'=4x^3-6x$

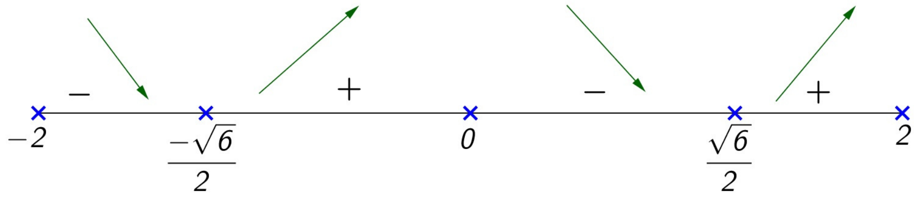
$$4x^3-6x=0, \quad x\left(4x^2-6\right)=0 \begin{cases} x=0\\ 4x^2-6=0, \quad 4x^2=6, \quad x^2=\dfrac{6}{4}, \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{6}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cong\pm 1'2247\end{cases}$$

Estudiemos el signo de y´ en los siguientes intervalos



x	$y' = 4x^3 - 6x$	
$-1'5$	$4\,(-1'5)^3 - 6\,(-1'5) = -4'5$	$-$
-1	$4\,(-1)^3 - 6\,(-1) = 2$	$+$
1	$4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -2$	$-$
$1'5$	$4 \cdot 1'5^3 - 6 \cdot 1'5 = 4'5$	$+$

Luego,



El máximo relativo de y está en x = 0, por tanto el máximo relativo de f(x) está en x =0. Pero como f(x) está definida en un intervalo debemos obtener el valor de f(x) en los extremos para determinar el máximo absoluto,

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
-2	$\sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$
0	$\sqrt{0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$
2	$\sqrt{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$

El máximo absoluto de f(x) se alcanza en x = – 2 y   x = 2.

Por lo que, ***los puntos de la curva a mayor distancia absoluta del punto (0 , 2) son los puntos (– 2 , 0) y (2 , 0)*** *{para los valores de x obtenidos, los puntos los calculamos en el apartado a)}.*

c) Obtengamos el mínimo absoluto de f(x).

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que los mínimos relativos están en $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$*. Como a la izquierda de ellos la función es decreciente y a la derecha creciente, el mínimo absoluto será alguno de ellos. Calculemos f(x) para estos valores de x,*

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

El mínimo absoluto se alcanza en los dos valores.

Calculemos los puntos de la curva correspondientes,

x	$y = 4 - x^2$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

Finalmente, ***los puntos de la curva*** $y = 4 - x^2$ ***a menor distancia absoluta del punto*** $(0, 2)$ ***son*** $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

d) Representemos la superficie de la que debemos calcular su área. {sabemos que $-2 \le x \le 2$*}*

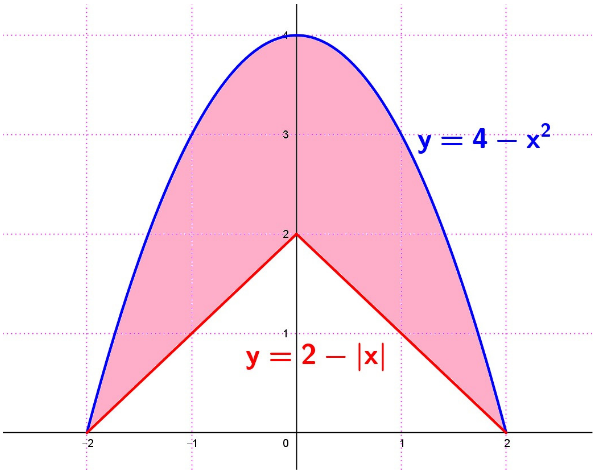
$y = 4 - x^2$ *la representamos en el apartado a)*

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x, & x > 0 \\ 2 + x, & x \le 0 \end{cases}$$

x	$2-x$
0	2
2	0

x	$2+x$
0	2
-2	0

La representación es,



Esta figura es simétrica respecto del eje OY ya que,

1) $$\begin{array}{l} g(x) = 4 - x^2 \\ g(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad g(x) = g(-x)$$

2) $$\begin{array}{l} h(x) = 2 - |x| \\ h(-x) = 2 - |-x| = 2 - |x| \end{array} \quad \rightarrow \quad h(x) = h(-x)$$

Calculamos:

$$\int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx = \int_0^2 \left(4 - x^2 - 2 + x \right) dx = \int_0^2 \left(2 - x^2 + x \right) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10}{3}$$

Y $A_S = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$ *u.a.*

El área de la superficie pedida es $\frac{20}{3}$ ***u.a.***

* * *

En caso de no observar la simetría de la figura, el cálculo sería,

$$A_1 = \int_{-0}^{0} \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx \qquad y \qquad A_2 = \int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx$$

Y $A_S = A_1 + A_2$.