PROBLEMA A.3. Se considera la función $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) La representación gráfica de la curva de la curva *y = f(x)*, *(2 puntos)*

c) El valor del parámetro *a* para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función *g(x) = f(x) + a x*. *(4 puntos)*

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx,\ \int x\,e^{-x}dx.$ *(1 punto)*

Solución:

a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L'Hopital) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L'Hopital) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Monotonía.

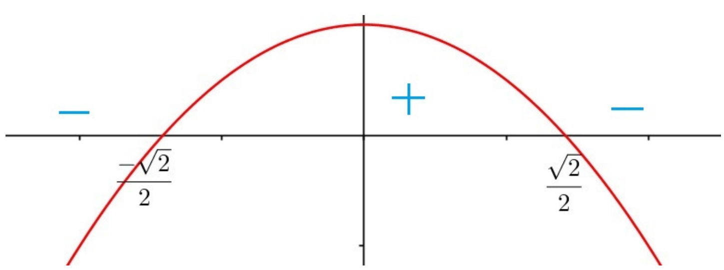
$$f'(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \quad\to\quad e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } solución \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \to 2x^2 = 1 \to x^2 = \dfrac{1}{2} \to x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

En f´(x) el factor e^{-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad \rightarrow \quad \textit{Máximo relativo} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (0´71, 0´43)$$

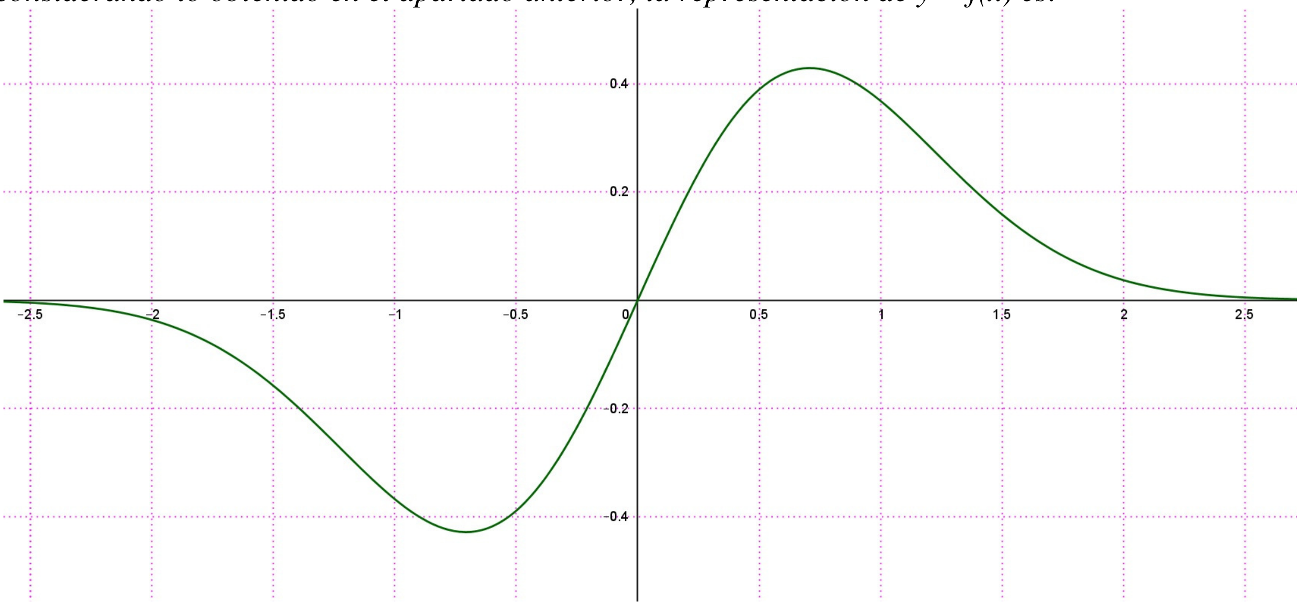
$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad \rightarrow \quad \textit{Mínimo relativo} \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (-0´71, -0´43)$$

b) Representación gráfica de y = f(x)

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \cdot e^{-0^2} = 0 \\ y = 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot e^{-x^2} = 0 \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } \textit{solución} \end{array} \right. \end{array}\right\} \quad \textit{pto. corte} \quad (0{,}0)$$

Y considerando lo obtenido en el apartado anterior, la representación de y = f(x) es:



c) ¿a? / g(x) = f(x) + a x cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1]

$$g(x) = x\, e^{-x^2} + a\, x$$

El teorema de Rolle dice:

Si f(x) es continua en [a, b], f(x) derivable en (a, b) y f(a) = f(b) entonces $\exists c \in (a, b) / f´(c) = 0$

Por definición, g(x) es continua y derivable en $\Re$*, entonces:*

g(x) es continua en [0, 1]

g(x) es derivable en (0, 1)

hay que comprobar que g(0) = g(1)

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{e} + a \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{e} + a \quad \rightarrow \quad a = \frac{-1}{e}$$

Para que g(x) cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] debe ser $a = \frac{-1}{e}$.

d)

$$1)\ \int f(x)\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \to \dfrac{dt}{-2} = x\,dx \end{array} \right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t\,dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$Luego \quad \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$2)\ \int x\,e^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$Luego \quad \int x\,e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$$