PROBLEMA B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0,0) y (250,0), respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0,\frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

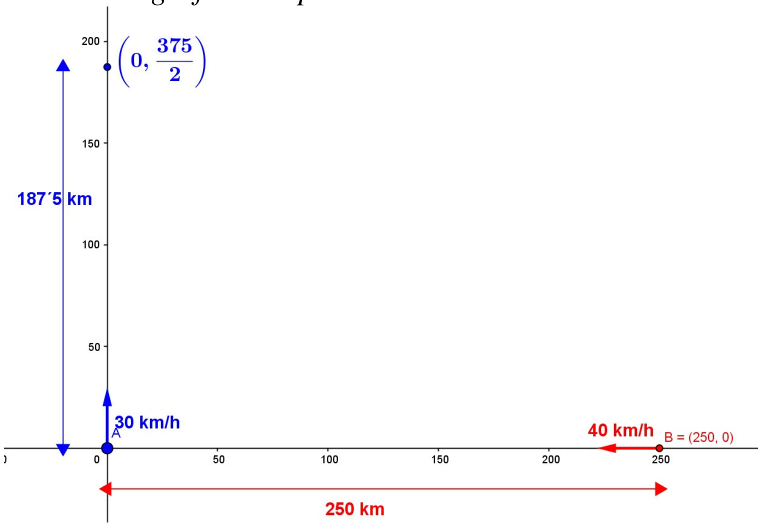
a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. *(2 puntos)*

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. *(4 puntos)*

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. *(4 puntos)*

Solución:

La representación gráfica del problema es:



La indicación "siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1,0) y (0,1)" significa que en ambos ejes la unidad es 1 km.
La distancia que debe recorrer el móvil A es de 187´5 km, y el móvil B 250 km.

a) Distancia entre los móviles en función del tiempo t.

Al cabo de t horas el móvil A habrá recorrido 30 t Km y su posición será el punto (0 , 30 t)

Al cabo de t horas el móvil B habrá recorrido 40 t Km y su posición será el punto (250 – 40 t , 0)

Por tanto, $f(t) = d(A, B) = \sqrt{(250-40t-0)^2+(0-30t)^2} = \sqrt{62500-20000t+1600t^2+900t^2} =$

$= \sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}$

Luego $f(t)=\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}$.

b) A llega a su posición final cuando $30t=\frac{375}{2} \rightarrow 60t=375 \rightarrow t=\frac{375}{60}=6´25$

B llega a su posición final cuando $40t=250 \rightarrow t=\frac{250}{40}=6´25$

Luego, ***ambos móviles tardan 6´25 h en desplazarse desde su posición inicial a la final.***

Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(t) a lo largo del trayecto, estudiamos la monotonía de f(t).

De lo calculado en el apartado a) y lo obtenido en este apartado, sabemos que:

$f(t)=\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2} \qquad 0\le t\le 6´25 \qquad \{t \text{ horas} \quad y \quad f(t)\ Km\}$

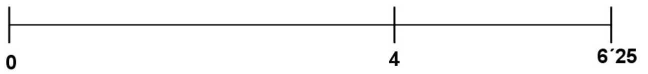
Estudiemos el signo de f´(t)

$$f'(t)=\frac{-20000+5000\,t}{2\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}}$$

$$\frac{-20000+5000\,t}{2\sqrt{62500-20000\,t+2500\,t^2}}=0 \quad\rightarrow\quad -20000+5000\,t=0 \quad\rightarrow\quad 5000\,t=20000$$

$$\rightarrow \quad t=\frac{20000}{5000}=4$$

Debemos estudiar el signo de f´(t) en los intervalos:



t	$f'(t)$
1	$\dfrac{-20000+5000\cdot 1}{2\sqrt{62500-20000\cdot 1+2500\cdot 1^2}}=-$
5	$\dfrac{-20000+5000\cdot 5}{2\sqrt{62500-20000\cdot 5+2500\cdot 5^2}}=+$

Finalmente, ***f(t) es decreciente en (0 , 4) y creciente en (4 , 6´25).***

c) Máximos y mínimos de f(t)

Del estudio de la monotonía de f(t) deducimos que para t = 4 hay un mínimo relativo. Y este mínimo relativo es el absoluto porque la función a su izquierda es decreciente y a su derecha creciente.

El máximo de f(t) se alcanzará en alguno de los extremos del intervalo [0 , 6´25].

Calculemos el valor de f(t) en estos extremos,

$$t=0, \quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 0+2500\cdot 0^2}=250$$

$$t=5, \quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 5+2500\cdot 5^2}=187´5$$

Luego, el máximo se alcanza en t =0.

Para terminar nos falta calcular f(4), $t=4, \quad f(t)=\sqrt{62500-20000\cdot 4+2500\cdot 4^2}=150$

Finalmente, ***la distancia máxima entre los móviles A y B se alcanza en el momento inicial (t = 0 h) y es de 250 km. La mínima para t = 4 h y es de 150 km.***