PROBLEMA 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) La integral $\int f(x)\,dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2 , 0). *(3+1 puntos)*

c) El área de la región limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y* = 0, *x* = 2, *x* = 4. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$

Dom f(x),

$$x^2\,(x-1)=0\left\langle\begin{array}{l} x^2=0\rightarrow x=0 \\ x-1=0\rightarrow x=1\end{array}\right. \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{2}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$, ***las asíntotas verticales son x = 0 y x = 1 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2}{x^2\,(x-1)} \quad \rightarrow \quad x^2+1=A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2$$

$$x=0\rightarrow 0^2+1=A\cdot 0\,(0-1)+B\,(0-1)+C\cdot 0^2 \quad \rightarrow \quad 1=-B \quad \rightarrow \quad B=-1$$

$$x=1\rightarrow 2=C \quad \rightarrow \quad C=2$$

$$x=2\rightarrow 2^2+1=A\cdot 2\,(2-1)+B\,(2-1)+C\cdot 2^2 \quad \rightarrow \quad 5=2A+B+4C \quad \rightarrow \quad 5=2A-1+4\cdot 2$$

$$5=2A+7; \quad -2=2A; \quad A=-1$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x^2}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx = (*)$$

$$\int\frac{-1}{x^2}\,dx = \int -x^{-2}dx = -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(*) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

Luego , $\int\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$

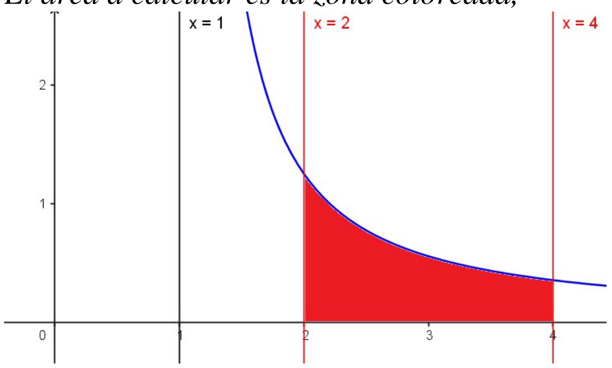
La primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) será,

Para $x = 2$, $-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1| + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\,Ln\,1 + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\cdot 0 + C = 0$

$$-Ln\,2 + \frac{1}{2} + C = 0;\quad C = -\frac{1}{2} + Ln\,2$$

Finalmente, ***la primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) es*** $F(x) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1| - \frac{1}{2} + Ln\,2$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.
El área a calcular la dibujamos considerando las asíntotas de la función obtenidas en el apartado a) y que para $x \geq 2$, tanto el numerado como el denominador de $f(x)$ son positivos, $f(x)$ es positiva.
El área a calcular es la zona coloreada,



Esta área la calculamos mediante la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[-Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1|\right]_2^4 = \left(-Ln|4| + \frac{1}{4} + 2Ln|4-1|\right) - \left(-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1|\right) =$$

$$= -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2Ln\,1 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2\cdot 0 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 2Ln\,3 + Ln\,2 - Ln\,4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = Ln\,3^2 + Ln\,2 - Ln\,4 - \frac{1}{4} = Ln\frac{9\cdot 2}{4} - \frac{1}{4} = Ln\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \cong 1'25407739 \text{ u.a.}$$

El área de la región pedida es 1´25407739 u.a.