PROBLEMA 6. Los vértices de un triángulo son A (0 , 12), B (– 5 , 0) y C (5 , 0).Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas (– x , 0) y (x , 0) siendo $0 \le x \le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos *AB* y *AC*.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

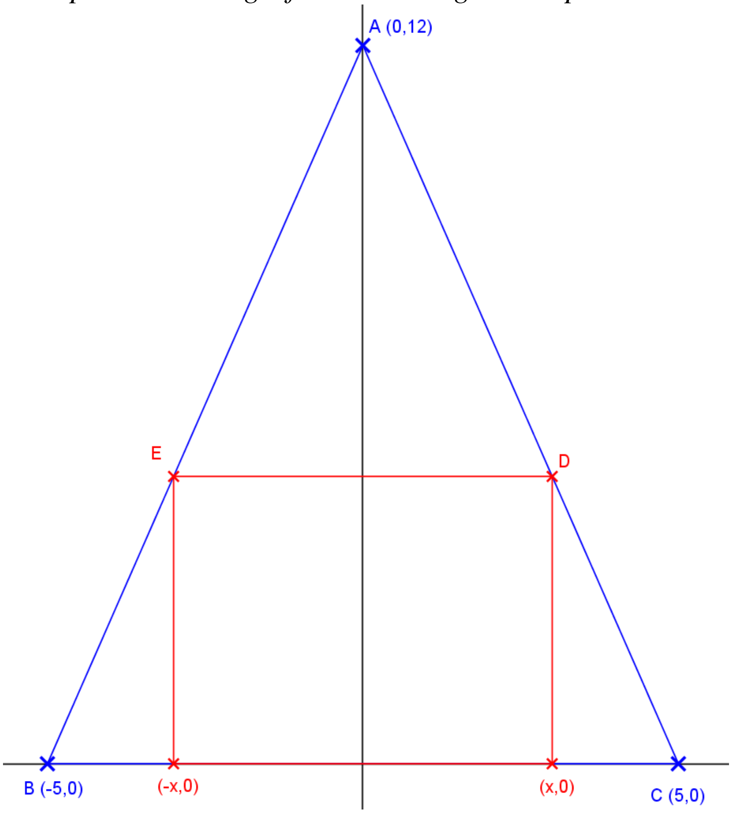
a) La expresión *f(x)* del área del rectángulo anterior. *(4 puntos)*

b) El valor de *x* para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. *(3 puntos)*

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. *(3 puntos)*

Solución:

La representación gráfica del triángulo del problema es:



El triángulo ABC, por construcción, es isósceles de lado desigual BC.

Podemos comprobarlo calculando,

$$d(A,B)=\sqrt{(-5-0)^2+(0-12)^2}=13$$

$$d(A,C)=\sqrt{(5-0)^2+(0-12)^2}=13$$

Del rectángulo inscrito conocemos su base que mide 2 x. Calculemos su altura. Debemos obtener el vértice D.

Recta que pasa por A y C,

$$\vec{AC}=(5,-12)$$

$$r_{AC}:\frac{x-5}{5}=\frac{y-0}{-12} \quad \to \quad y=\frac{-12\,(x-5)}{5}$$

Por tanto las coordenadas de D son:

$$\left(x,\frac{-12\,(x-5)}{5}\right)$$

a) Área del rectángulo inscrito

De lo calculado anteriormente sabemos que la base del rectángulo es $2x$ *y la altura* $\frac{-12\,(x-5)}{5}$.

$$A_R=2x\cdot\frac{-12(x-5)}{5}=\frac{-24x(x-5)}{5}$$

Por construcción el valor de x *puede variar entre* 0 *y* 5.

Por tanto, $f(x)=\frac{-24x\,(x-5)}{5} \quad x\in[0,5]$

b) ¿x? / área del rectángulo es máxima.

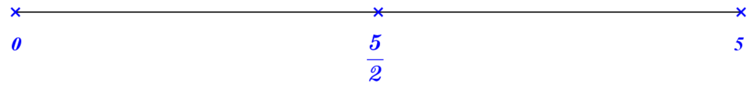
$$f(x)=\frac{-24x\,(x-5)}{5}=\frac{-24x^2+120x}{5} \quad x\in[0,5]$$

Busquemos el máximo.

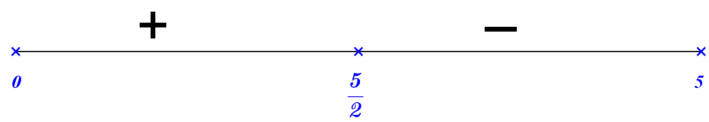
$$f'(x)=\frac{-48x+120}{5}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-48x+120}{5}=0; \quad -48x+120=0; \quad 48x=120; \quad x=\frac{120}{48}=\frac{5}{2}$$

Como el dominio de f(x) es el intervalo (0,5), estudiaremos el signo de f´(x) en los intervalos:



x	$f'(x)$	
1	$\frac{-48\cdot 1+120}{5}=14'4$	$+$
3	$\frac{-48\cdot 3+120}{5}=-4'8$	$-$



Luego en $x=\frac{5}{2}$ *hay un máximo local de f(x) que es el absoluto porque a su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente.*

$$x=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{-24\cdot\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-5\right)}{5}=30$$

Dimensiones del rectángulo de área máxima:

$$base: \quad 2\cdot\frac{5}{2}=5$$

$$altura: \frac{-12\left(\frac{5}{2}-5\right)}{5}=6$$

Solución: el área del rectángulo es máxima para $x=\frac{5}{2}$ ***y las dimensiones del rectángulo son, base 5 u.l y altura 6 u.l. (el área del rectángulo es 30 u.a.).***

c) ¿Proporción entre el área del rectángulo y la del triángulo?

En el apartado anterior hemos obtenido el área del rectángulo, $A_r = 30$

Como T es un triángulo isósceles de base 10 y altura 12, $A_T=\frac{10\cdot 12}{2}=60.$

Por tanto, $\frac{A_r}{A_T}=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$

Finalmente, ***la proporción entre el área del rectángulo y la del triángulo es*** $\frac{1}{2}\cdot$